Estimation of CVaR value and their use for managing insurance risks

Odhad hodnoty CVaR a jej využiti při riadení poistných rizík

Galina Horáková[1]

Abstract

The SOLVENCY II Project arose on the basis of efforts to ensure the stability of the insurance sector in the European Union and lays emphasis on the management of risk and control mechanisms. The level of economic capital must ensure an adequate level of solvency given the insurance contracts offered. The aim of the paper is to present an approach for quickly determining a coherent level of risk in the form of *CvaR* values by the use of exponential dispersion models. The application part is devoted to the modification and use of the obtained estimates of the *CvaR* values for the management of insurance risks and the setting of the appropriate economic capital. The results gained are then compared with the values obtained using the Monte Carlo method.

Key words

Value-at- risk, conditional tail expectations, continuous exponential dispersion distributions, compound distribution, economic capital .

JEL Classification: G22 - Insurance; Insurance Companies

1. Úvod

QIS5 ponúka základnú metodiku pre výpočet ekonomického kapitálu potrebného na krytie neočakávaných škôd aj bez využitia stochastického prístupu, ale tento odporúča. V príspevku využijeme kvantifikáciu poistného rizika pomocou pravdepodobnostných rozdelení. Prístup sa môže javiť ako zložitý, ale výhody prevažujú nad náročnosťou postupov a umožňujú analyzovať aj menšie riziká. Rozdelenia popisujúce riziká získame na základe interných dát, z ktorých sa vytvorí zložené rozdelenie agregovanej škody. Jeho znalosť umožňuje analyzovať riziko a prispieva k vyhnutiu sa situáciám, že výnosy budú nedostatočné na krytie prevzatých záväzkov. Väčšina najčastejšie využívaných mier rizika je totiž založená na využití náhodných veličín popisujúcich pravdepodobnostné rozdelenie strát portfólia za určitý čas, teda vedie aj k vyjadreniu mier rizika *VaR* a *CVaR*. Záujem o stanovenie nielen maximálnej straty, ale aj na základe nej odvodenej miery rizika *CVaR*, podmienenej strednej hodnoty pravých koncov rozdelení, stále stúpa. Táto hodnota predstavuje očakávanú stratu, ktorá môže byť spôsobená v danom časovom období zo všetkých škôd presahujúcich príslušnú hodnotu *VaR* s konkrétnou pravdepodobnosťou. Podľa dopadových štúdií QIS5 sa jedná o dôležitú hodnotu pre kvantifikáciu rizika a preto by spoločnosť mala byť schopná jednak s vysokou presnosťou správne určiť príslušné rozdelenie pravdepodobnosti a jeho

[1] Doc. RNDr. Galina Horáková, CSc., Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, Slovensko, e-mail: horáková@euba.sk

distribučnú funkciu a jednak s požadovaným stupňom spoľahlivosti stanoviť miery rizika. Miery rizika by mali spĺňať štyri vlastnosti: subaditivitu, monotónnosť, homogenitu a invariantnosť. Hodnota *CVaR* je miera rizika, ktorá uvedené vlastnosti má, no jej stanovenie nie je v niektorých prípadoch jednoduché. H. Panjerom boli vyvinuté postupy na jej pomerne jednoduché určenie pri niektorých rozdeleniach, E. Valdezom a Z. Landsmanom boli tieto výsledky rozšírené. Sú založené na využití širokej triedy exponenciálnych disperzných modelov, ktoré na jednej strane zovšeobecňujú normálne rozdelenie a využívajú niektoré z jeho dôležitých vlastností, ale majú aj vlastnosti pravostranne zošikmených rozdelení.

Dve triedy exponenciálnych disperzných modelov zahŕňajú diskrétne rozdelenie Poissonovo, binomické a negatívne binomické rozdelenie, za spojitých normálne, gama a inverzné Gaussovo rozdelenie. Teda rozdelenia, ktoré sú vhodné ako modely poistných udalostí aj ich počtu.

Základné definície reprodukčnej aj aditívnej exponenciálnej disperznej triedy rozdelení vyhovujú pre uvedené diskrétne aj spojité rozdelenia. V tomto príspevku podrobne predstavíme postup stanovenia hodnoty *CVaR* pre normálne a gama rozdelenie a teóriu exponenciálnych disperzných modelov využijeme pre určenie mier rizika heterogénneho portfólia poistných zmlúv. Modifikujeme základné vzťahy a aplikujeme ich pri stanovení hodnoty *CVaR* pre zložené rozdelenie celkovej škody a príslušného ekonomického kapitálu na krytie prevzatého rizika. Výsledné vzťahy pre hodnotu *CVaR* vyjadríme pomocou pôvodných parametrov konkrétnych rozdelení, ktoré zapadajú do celkovej koncepcie kolektívneho modelu rizika a ktorých použitie vedie k rýchlemu a bezproblémovému stanoveniu mier rizika.

2. Hodnota *CVaR* a ekonomický kapitál

Jednou z najpoužívanejších mier poistného rizika je hodnota *VaR* (*Value-at-Risk*), ktorú možno v poisťovníctve slovne vyjadriť ako maximálnu škodu, ktorá nastane za určitú časovú jednotku s konkrétnou pravdepodobnosťou. *VaR* náhodnej premennej X opisujúcej škodu z konkrétneho rizika s pravdepodobnosťou p je $100\,p$ % kvantil, označovaný $VaR_p(X)$ alebo x_p a pre ktorý platí

$$VaR_p(X) = \inf\{x \in R : F_X(x) \geq p\}, 0 < p < 1 \tag{1}$$

Pri výpočtoch založených na hodnote *VaR* treba brať do úvahy určité obmedzenia, lebo táto hodnota zo súčtu dvoch rizík môže byť vyššia ako súčet individuálnych hodnôt z jednotlivých rizík. A práve alternatívnou a pritom koherentnou mierou rizika je podmienená hodnota v riziku *CVaR* (*Conditional Tail Expectation, Tail VaR*), ktorá je vlastne spresnenie odhadu hodnoty v riziku.

Hodnotu $CVaR_p(X)$ náhodnej premennej X opisujúcej riziko a nielen poistné, pre ktorú $P(X > x_p) > 0$, vyjadríme pomocou náhodnú premennú $Y = X - x_p$, ktorej distribučná funkcia má tvar

$$F_Y(\zeta) = \begin{cases} 0 & \zeta < VaR_p(X) \\ \dfrac{F_X(\zeta) - p}{(1-p)} & \zeta \geq VaR_p(X) \end{cases} \tag{2}$$

a hodnota

$$E(Y) = E(X - x_p \,/\, X > x_p) \tag{3}$$

sa nazýva stredná hodnota prebytočnej škody (*mean excess loss*). Túto substitúciou vyjadríme ako prvý začiatočný moment náhodnej premennej *Y*. Pre spojitú a diskrétnu náhodnú premennú platí

$$E(Y) = \begin{cases} \dfrac{\int_{x_p}^{\infty} (x - x_p) \cdot f_X(x)\mathrm{d}x}{1 - F_X(x_p)} \\ \dfrac{\sum_{x_i > x_p} (x_i - x_p) \cdot p_X(x_i)}{1 - F_X(x_p)} \end{cases} \tag{4}$$

$CVaR_p(X)$ je očakávaná škoda zo všetkých škôd prekračujúcich hodnotu kvantilu x_p príslušného rozdelenia. Platí

$$CVaR_p(X) = E(X \,/\, X > x_p) = \begin{cases} \dfrac{\int_{x_p}^{\infty} x \cdot f_X(x)\mathrm{d}x}{P(X > x_p)} \\ \dfrac{\sum_{x_i > x_p} x_i \cdot p_X(x_i)}{P(X > x_p)} \end{cases} \tag{5}$$

čo vyjadríme aj ako

$$CVaR_p(X) = E(Y) + x_p \tag{6}$$

Predchádzajúce odvodenia sa dajú využiť v aktuárstve nielen pre popísanie rizika individuálnej škody, počtu škôd, ale aj pre zložené rozdelenia celkovej škody. V prípade spojitej náhodnej premennej s existujúcou strednou hodnotou sú kľúčové pri odhade ekonomického kapitálu. Ekonomický kapitál potrebný na krytie rizika popísaného náhodnou premennou *X* vyjadrený pomocou hodnoty *VaR* je definovaný ako neočakávaná strata z náhodnej premennej *X* vzťahom

$$SCR_p^{VaR}(X) = VaR_p(X - E(X)) = VaR_p(X) - E(X) \tag{7}$$

Podobne kapitálovú požiadavku na solventnosť vyjadrenú podľa hodnoty *CVaR* označíme $SCR_p^{CVaR}(X)$ a definujeme vzťahom

$$SCR_p^{CVaR}(X) = CVaR_p(X - E(X)) = CVaR_p(X) - E(X) \tag{8}$$

V mnohých prípadoch však využitie uvedených vzťahov na výpočet mier rizika je numericky náročné, resp. ťažko realizovateľné. Jeden zo spôsobov ako hodnotu *CVaR* určiť umožňujú exponenciálne disperzné modely.

3. Stanovenie hodnoty *CVaR* využitím exponenciálnych disperzných modelov

Odvodíme vzťahy, ktoré umožňujú získať informácie o pravých koncoch rozdelení patriacich do triedy exponenciálnych disperzných modelov, ktoré zjednodušujú výpočet hodnoty *CVaR*. Teda pre rozdelenia, ktoré majú spoločné to, že ich zákon rozdelenia je vyjadriteľný pomocou exponenciálnej funkcie a disperzia je vyjadrená ako funkcia.

Uvedieme definície dvoch tried rozdelení a na základe ich momentových vytvárajúcich funkcií odvodíme charakteristiky a vzťah na odhad hodnoty *CVaR*, ktorý platí pre všetky rozdelenia uvedené vyššie. Podrobne však predstavíme stanovenie koherentnej miery rizika iba pre dve konkrétne spojité rozdelenia, vzťahujúce sa k aplikačnej ukážke.

3.1 Reprodukčná exponenciálna disperzná trieda rozdelení

Náhodná premenná X patrí do *reprodukčnej exponenciálnej disperznej triedy* (*REDF*), ak jej funkcia hustoty resp. pravdepodobnostná funkcia môže byť vyjadrená pomocou funkcie $k(\theta)$ a parametra λ v tvare

$$f_{X^{REDF}}(x,\theta,\lambda) = e^{\lambda\cdot(\theta x - k(\theta))}\cdot q(x,\lambda) \tag{8}$$

pričom θ sa nazýva všeobecný parameter, patrí do množiny $\Theta = \{\theta \in R, k(\theta) < \infty\}$, parameter λ, $\lambda > 0$, je číselný parameter.

Momentovú vytvárajúcu funkciu vyjadríme pomocou parametrov θ a λ vzťahom

$$m_{X^{REDF}}(z) = e^{\lambda\left\{k\left(\theta+\frac{z}{\lambda}\right)-k(\theta)\right\}} \tag{9}$$

pretože

$$m_{X^{REDF}}(z) = E\left(e^{zX^{REDF}}\right) = \int_H e^{xz}\cdot e^{\lambda(\theta x - k(\theta))} q(x,\lambda)\,\mathrm{d}x = \int_H e^{\lambda\left\{\left(\theta+\frac{z}{\lambda}\right)x - k(\theta)\right\}} q(x,\lambda)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(e^{\lambda\cdot\left\{k\left(\left(\theta+\frac{z}{\lambda}\right)-k(\theta)\right)\right\}}\right)\int_H e^{\lambda\cdot\left\{k\left(\left(\theta+\frac{z}{\lambda}\right)-k(\theta)\right)\right\}} e^{\lambda\cdot\left\{\left(\theta+\frac{z}{\lambda}\right)x-k\left(\theta+\frac{z}{\lambda}\right)\right\}} q(x,\lambda)\,\mathrm{d}x$$

Vzťah (9) umožňuje priamo odvodiť strednú hodnotu a disperziu spojitej náhodnej premennej X^{REDF}.

$$\mu = E(X^{REDF}) = \left(\ln m_{X^{REDF}}(z)\right)'_{z=0} = k'(\theta) \tag{10}$$

$$D(X^{REDF}) = \left(\ln m_{X^{REDF}}(z)\right)''_{z=0} = \lambda^{-1}k''(\theta) \tag{11}$$

kde $\frac{1}{\lambda} = \sigma^2$ je parameter disperzie.

Všeobecné odvodenie hodnoty *CVaR* pre triedu *REDF* (ale aj pre nasledujúcu triedu *AEDF* v článku 3.2) je uvedené v [4] využitím miery rizika v podobe funkcie $h_X(x)$ (*hazard rate*), náhodnej premennej X

$$h_X(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} \tag{12}$$

Pre náhodnú premennú X z triedy *REDF* podmienená hodnota v riziku je

$$CVaR_p(X^{REDF}) = \mu + \sigma^2 h \tag{13}$$

kde $\sigma^2 = \dfrac{1}{\lambda}$ a $h = h_{X^{REDF}}(x_p) = \dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln \bar{F}_{X^{REDF}}(x_p,\theta,\lambda)$, pričom $P(X^{REDF} > x_p) = \bar{F}_{X^{REDF}}(x_p)$.

Vzťah (13) využijeme pri stanovení hodnoty *CVaR* pre náhodnú premennú s normálnym rozdelením $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, ktorá má hustotu pravdepodobnosti

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in R$$

ktorú možno upraviť do tvaru

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}\cdot e^{\frac{1}{\sigma^2}\cdot\left(\mu x - \frac{1}{2}\mu^2\right)}$$

čo je vzhľadom na (8) funkcia hustoty normálneho rozdelenia vyjadrená ako dvojparametrické rozdelenie z triedy *REDF* s hustotou v tvare

$$f_{X^{REDF}}(x,\theta,\lambda) = e^{\lambda\cdot\left(\theta x - \frac{\theta^2}{2}\right)}\cdot q(x,\lambda))$$

pričom $\lambda = \dfrac{1}{\sigma^2}$, $\theta = \mu$, $k(\theta) = \dfrac{1}{2}\theta^2$ a $q(x,\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$. Táto reparametrizácia vedie k zápisu $X^{REDF} \sim N(\theta,\lambda))$. Jej strednú hodnotu dostaneme podľa (10)

$$E(X^{REDF}) = \mu = k'(\theta)$$

a disperziu podľa (11)

$$D(X^{REDF}) = k''(\theta)\frac{1}{\lambda} = k''(\theta)\frac{1}{\lambda} = k''(\theta)\lambda^{-1}$$

pričom

$$h_{X^{REDF}}(x_p) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln \bar{F}_{X^{REDF}}(x_p,\theta,\lambda) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln\left(1-\Phi\left(\sqrt{\lambda}\left(x_p-\theta\right)\right)\right)$$
$$= \frac{\sqrt{\lambda}\cdot\varphi\left(\sqrt{\lambda}\left(x_p-\theta\right)\right)}{\left(1-\Phi\left(\sqrt{\lambda}\left(x_p-\theta\right)\right)\right)}$$

kde $\bar{F}_{X^{REDF}}(x_p,\theta,\lambda) = 1 - F_{X^{REDF}}(x_p,\theta,\lambda)$ a φ je hustota a Φ distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia.

Teda hodnotu *CVaR* pre náhodnú premennú $X^{REDF} \sim N(\theta,\lambda)$ vyjadríme podľa (13)

$$CVaR_p(X^{REDF}) = \mu + \frac{\varphi\left(\sqrt{\lambda}\left(x_p-\theta\right)\right)}{\left(1-\Phi\left(\sqrt{\lambda}\left(x_p-\theta\right)\right)\right)}\sigma \tag{14}$$

3.2 Aditívna exponenciálna disperzná trieda rozdelení

Náhodná premenná *X* patrí do *aditívnej exponenciálnej disperznej triedy AEDF*, ak jej funkcia hustoty, resp. pravdepodobnostná funkcia môže byť vyjadrená pomocou funkcie $k(\theta)$ a parametra λ v tvare

$$f_{X^{AEDR}}(x,\theta,\lambda) = e^{(\theta x - \lambda \cdot k(\theta))} \cdot q(x,\lambda) \tag{15}$$

Podmienky pre parametre θ a λ sú identické ako pre triedu *REDF* a aj momentovú vytvárajúcu funkciu tejto náhodnej premennej odvodíme analogicky. Jej tvar je

$$m_{X^{AEDF}}(z) = E(e^{X^{AEDF} z}) = e^{\lambda\{k(\theta+z)-k(\theta)\}} \tag{16}$$

stredná hodnota

$$\mu = E(X^{AEDF}) = \lambda \cdot k'(\theta) \tag{17}$$

a disperzia

$$D(X^{AEDF}) = \lambda \cdot k''(\theta) \tag{18}$$

Hodnotu $CVaR_p(X^{AEDF})$ vyjadríme

$$CVaR_p(X^{AEDF}) = \mu + h \tag{19}$$

kde $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda}$ a $h_{X^{AEDR}}(x_p) = \frac{\partial}{\partial\theta} \ln \bar{F}_{X^{AEDR}}(x_p,\theta,\lambda)$, pričom $P(X > x_p) = \bar{F}_{X^{AEDR}}(x)$.

Vzťah (19) využijeme k stanoveniu hodnoty *CVaR* náhodnej premennej *X* s gama rozdelením $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$, pretože hustota pravdepodobnosti tohto rozdelenie je

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^{\alpha}} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}, \; x \in (0;\infty)$$

ktorú možno upraviť na

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta} - \alpha \ln\beta}$$

ako dvoj parametrické rozdelenie z triedy *AEDF* vyjadriť vzťahom

$$f_{X^{AEDF}}(x,\theta,\lambda) = e^{\theta x + \lambda \cdot \ln(-\theta)} \cdot q(x,\lambda))$$

pričom $\lambda = \alpha,\ \theta = -\frac{1}{\beta},\ k(\theta) = -\ln(-\theta)$ a $q(x,\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1}$

Platí

$$\begin{aligned} h = h_{X^{AEDF}}(x) &= \frac{\partial}{\partial\theta} \ln \bar{F}_{X^{AEDF}}(x_p,\theta,\lambda) = \\ &= -\frac{\lambda}{\theta}\left(\frac{\bar{F}_{X^{AEDF}}(x_p;\theta;\lambda+1)}{\bar{F}_{X^{AEDF}}(x_p;\theta;\lambda)} - 1 \right) \end{aligned}$$

z čoho na základe (19)

$$CVaR_p(X^{AEDF}) = \mu\left(\frac{\bar{F}_{X^{ADEF}}(x_p;\theta;\lambda+1)}{\bar{F}_{X^{ADEF}}(x_p;\theta;\lambda)} \right) \tag{20}$$

V mnohých prípadoch však využitie uvedených vzťahov na výpočet mier rizika je numericky náročné, resp. ťažko realizovateľné. Jeden zo spôsobov ako hodnotu *CVaR* určiť umožňujú exponenciálne disperzné modely.

4. Stanovenie hodnoty *CVaR* v poistnej praxi

Exponenciálne disperzné modely prostredníctvom vzťahov (14) a (20) využijeme na ilustráciu rýchleho a bezproblémového dosiahnutie požadovanej miery poistného rizika, ktorá bude popisovať celkovú škodu z heterogénneho portfólia poistných zmlúv. Rozdelenie celkovej škody sme zvolili také, pri ktorom získame odhad hodnoty *CVaR* nielen aproximatívnymi metódami a simuláciami, ale možno ho vyjadriť aj exaktne, čo umožní porovnať výsledky a prácnosť jednotlivých postupov.

Riziko, ktoré budeme kvantifikovať hodnotou *CVaR*, je opísané počtom škôd s Poissonovým rozdelením s parametrom $l = 30$ a výškou individuálnej škody s exponenciálnom rozdelením s očakávanou výškou škody 10. Celková škoda S^{kol} má zložené Poissonovo rozdelenie, ktorého distribučnú funkciu možno vyjadriť v explicitnom tvare odvodenom napr. v [3], so strednou hodnotou $E(S^{kol}) = 300$, disperziou $D(S^{kol}) = 6\,000$ a tretím centrálnym momentom $m_3(S^{kol}) = 18\,000$.

Podľa (1) a (6) vyjadríme exaktne hodnoty $VaR_p(S^{kol})$ a $CVaR_p(S^{kol})$, ktoré sú, s pravdepodobnosťami odporúčanými pre poistnú prax, v tabuľkách 1 a 2 v prvom stĺpci. Stanovenie týchto hodnôt je časovo náročné, vyžadujúce hlbšie znalosti s prácou so zloženými rozdeleniami. Preto uvedieme ich alternatívny odhad využitím prezentovanej teórie a dosiahnuté výsledky pre porovnanie vložíme do zvyšných stĺpcov tabuliek 1 a 2. Podmienky kolektívneho modelu rizika, v ktorých pracujeme, sú vhodné na aproximáciu rozdelenia celkovej škody S^{kol} normálnym aj posunutým gama rozdelením, teda rozdeleniami, ktorých hodnotu *CVaR* možno odhadnúť pomocou exponenciálnych disperzných modelov vzťahmi (14) a (20).

Pre aproximáciu náhodnej premennej celkovej škody S^{kol} normálnym rozdelením použijeme premennú $Z_1 \sim N(300; 6000)$ a reparametrizovanú premennú patriacu do reprodukčnej disperznej triedy $Z_1^{REDF} \sim N(300; 1/6000)$. Z distribučnej funkcie premennej Z_1^{REDF} možno vyjadriť kvantily rozdelenia, ktoré sú uvedené v tabuľke 1 v druhom stĺpci. $CVaR_p(Z_1)$ vyjadríme podľa vzťahu (14) a jeho spätnou reparametrizáciou získame vyjadrenie tejto hodnoty pomocou parametrov pôvodného rozdelenia, teda

$$CVaR_p(Z_1) \approx \mu + \frac{\varphi\left(\left(\dfrac{x_p - \mu}{\sigma}\right)\right)}{\left(1 - \Phi\left(\dfrac{(x_p - \mu)}{\sigma}\right)\right)} \cdot \sigma \tag{21}$$

Vzťah (21) je jednoduchým nástrojom pre odhad podmienenej hodnoty v riziku pre náhodné premenné s normálnym rozdelením, resp. náhodné premenné, ktoré týmto rozdelením aproximujeme. V našom prípade aproximácia hodnôt $CVaR_p(S^{kol})$ normálnym rozdelením je uvedená v tabuľke 2 v druhom stĺpci.

Celkovú škodu môžeme aproximovať napr. aj gama rozdelením $Z_2 \sim G(15; 20)$, ktoré je pravostranne zošikmené, patrí do aditívnej disperznej triedy a pre náhodnú premennú

$Z_2^{AEDF} \sim \Gamma(15;-0,05)$, podľa vzťahu (20), získame hodnoty $CVaR_p(Z_2)$, ktoré sú pre príslušné pravdepodobnosti uvedené v tabuľke 2 v treťom stĺpci.

Porovnaním zatiaľ dosiahnutých hodnôt nielen maximálnej škody s konkrétnou pravdepodobnosťou, ale aj podmienenej strednej hodnoty vyplýva, že odhady sú použiteľné, ale nemusia vyhovovať požadovanej presnosti.

Problém presnosti vyrieši náhodná premenná s posunutým gama rozdelením $Z_4 \sim \Gamma\left(\frac{80}{3};15;-100\right)$, ktorá je ďalšou aproximáciou rozdelenia celkovej škody S^{kol}, ktorá umožňuje určiť podmienenú hodnotu v riziku modifikáciou vzťahu (20) pre náhodnú premennú $Z_3 \sim \Gamma\left(\frac{80}{3};15\right)$. Týmto spôsobom vyjadrené hodnoty $CVaR_p(Z_4)$ sú uvedené v piatom stĺpci tabuľky 2, a už plne korešpondujú s prvým stĺpcom tejto tabuľky, teda s hodnotami získanými exaktnou metódou.

Z dôvodu rýchleho a spoľahlivého stanovenia koherentnej miery rizika teda modifikáciou vzťahu (20) vzhľadom na posun rozdelenia vyjadríme vzťah pre hodnotu $CVaR_p(Z_4)$ gama rozdelenia $Z_4 \sim \Gamma(\alpha,\beta,x_0)$. Platí

$$CVaR_p(Z_4) = \alpha \cdot \beta \frac{\bar{F}_{Z_4}\left(x_p;\alpha+1;\beta\right)}{\bar{F}_{Z_4}\left(x_p;\alpha;\beta\right)} + x_0 \tag{22}$$

Tabuľka 1: Maximálna škoda s konkrétnou pravdepodobnosťou získaná alternatívnymi metódami výpočtu

p	$VaR_p(S^{kol})$	$VaR_p(Z_1)$	$VaR_p(Z_2)$	$VaR_p(Z_3)$	$VaR_p(Z_4)$	M-C VaR_p^l $n = 100\,000$
0.95	435.429	427.41	437.73	535.352	435.401	436.225
0.96	445.392	435.608	448.336	545.355	445.362	445.403
0.97	457.801	445.686	461.56	557.819	457.819	457.997
0.98	474.548	459.083	479.618	574.669	474.669	475.301
0.99	501.559	480.198	508.922	601.8904	501.8904	502.782

Tabuľka2: Podmienená hodnota v riziku s konkrétnou pravdepodobnosťou získaná alternatívnymi metódami výpočtu; $Z_1 \sim N(300;6000)$, $Z_2 \sim \Gamma(15;20)$, $Z_3 \sim \Gamma\left(\frac{80}{3};15\right)$, $Z_4 \sim \Gamma\left(\frac{80}{3};15;-100\right)$

p	$CVaR_p(S^{kol})$	$CVaR_p(Z_1)$	$CVaR_p(Z_2)$	$CVaR_p(Z_3)$	$CVaR_p(Z_4)$
0.95	476.1157341	459.7772072	481.5984510	576.3082565	476.3522772
0.96	485.0796167	466.8751785	491.2829750	585.3367436	485.3430313
0.97	496.3305953	475.6838736	503.4819675	596.6745476	496.6744752
0.98	511.6553785	487.5228947	520.1917498	612.1403057	512.1401940
0.99	536.6591822	506.4464871	547.6514861	637.4110566	537.4108228

Maximálna možná škoda s konkrétnou pravdepodobnosťou súvisí iba s jednou hodnotou rozdelenia. Neudáva žiadne informácie o pravých koncoch rozdelenia, teda o vyšších škodách ktoré nastanú s malou pravdepodobnosťou, ale majú vplyv na krytie rizika. Napriek tomu, že táto hodnota nevyhovuje subaditivite a môže viesť k nie úplne presným záverom, je veľmi často využívanou mierou aj v súvislosti s odhadom ekonomického kapitálu potrebného na krytie rizika. Hodnota ekonomického kapitálu pre naše skúmané riziko podľa vzťahu (7) je uvedená vzhľadom na aktuálne pravdepodobnosti v tabuľke 3.

Tabuľka 3: Ekonomický kapitál potrebný na krytie rizika stanovený metódami korešpondujúcimi s výpočtom hodnôt VaR_p uvedených v tabuľke1

p	$SCR_p^{VaR}(S^{kol})$	$SCR_p^{VaR}(Z_1)$	$SCR_p^{VaR}(Z_2)$	$SCR_p^{VaR}(Z_3)$	$SCR_p^{VaR}(Z_4)$	M-C SCR_p^{VaR} n = 100000
0.95	135.429	127.41	137.73	135.352	135.401	136.225
0.96	145.392	135.608	148.336	145.355	145.362	145.403
0.97	157.801	145.686	161.56	157.819	157.819	157.997
0.98	174.548	159.083	179.618	174.669	174.669	175.301
0.99	201.559	180.198	208.922	401.8904	201.8904	202.782

Porovnanie hodnôt v riadkoch tabuliek 1 a 2 vedie k záveru, že k hodnotám mier rizika vypočítaných exaktnou metódou sú najvhodnejšou aproximáciou hodnoty vypočítané podľa (22). Táto má však ešte jednu nezanedbateľnú výhodu a to rýchlosť a dostupnosť dosiahnutia výsledkov.

Porovnanie hodnôt v tabuľkách 1 a 2 potvrdzuje aj vplyv hodnôt vyšších ako je maximálna škoda s konkrétnou pravdepodobnosťou na výšku požadovaného kapitálu, ktorého výpočet sme realizovali podľa (8) a je uvedený v tabuľke 4.

Tabuľka 4 : Ekonomický kapitál potrebný na krytie rizika stanovený metódami korešpondujúcimi s výpočtom hodnôt $CVaR_p$ uvedených v tabuľke 2

p	$SCR_p^{CVaR}(S^{kol})$	$SCR_p^{CVaR}(Z_1)$	$SCR_p^{CVaR}(Z_2)$	$SCR_p^{CVaR}(Z_3)$	$SCR_p^{CVaR}(Z_4)$	M-C SCR_p^{CVaR} n = 100000
0.95	176.117	159.777	181.598	276.308	176.352	176.521
0.96	185.079	166.875	191.283	285.337	185.3433	185.456
0.97	196.331	175.684	503.482	296.675	196.674	196.984
0.98	174.548	159.083	179.618	274.669	174.669	175.803
0.99	201.559	180.198	208.922	201.890	201.890	202.581

Výraznou možnosťou získania hodnôt kvantilov zložených rozdelení sú aj simulácie Monte Carlo, alebo napr. využitie aktuárskych softvérov *ModelRisk* od spoločnosti V0SE, resp. *@Risk* od spoločnosti Palisade, ktoré na analýzu rizík tieto simulácie využívajú. Hodnoty konkrétnych kvantilov získané pomocou uvedených softvérov sú nielen porovnateľné, ale sú zastupiteľnou alternatívou pre hodnoty kvantilov získaných exaktnou metódou, alebo v našom prípade postupu založenom na vlastnostiach exponenciálnych disperzných modelov.

V prípade zloženého Poissonovho rozdelenia sú hodnoty získané simuláciami v poslednom stĺpci tabuľky 1.

Z uvedeného vyplýva, že stanovenie hodnoty *CVaR* umožní presnejší odhad ekonomického kapitálu potrebného na bezpečnejšie krytie prevzatého rizika oproti využití hodnoty *VaR* a navyše je mierou koherentnou. Z prezentovaných metód vyjadrenia tejto hodnoty je, v prípade, že analyzované riziko vyhovuje podmienkam aproximácie posunutým gama rozdelením, pre aktuára najrýchlejší a najjednoduchší spôsob stanovenia tejto hodnoty vzťah (22).

References

[1] Horáková, G., 2008. *Analýza rizikovosti portfólia poistných zmlúv neživotného poistenia*, 4. mezinárodní konference Řízení a modelovaní finančních rizik, VŠB-TU Ostrava, Ekonomická fakulta, Katedra financí.

[2] Horáková, G., Mucha, V., 2008. *Teória rizika v poistení* I, II. Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm.

[3] Klugman, S. A., Panjer, H. H., Willmot G. E., 2008. *Loss Models* (From Data to Decisions). New York: John Wiley & Sons.

[4] Panjer, H. H., 2006. *Operational Risk*. A John Wilye & Sons, Interscience Publication.

[5] Landsman, Z., Valdez E., 2004. *Tail Conditional Expectations for Exponential Dispersion Models*, XXXVth International ASTIN 2004 Colloqium, Bergen, Norway

[6] Mucha, V., 2008. *Simulation as a tool of risk management in general insurance.* 4. mezinárodní konference Řízení a modelovaní finančních rizik, VŠB-TU Ostrava, Ekonomická fakulta, Katedra financí.

[7] Fecenko, J.,2010. *Možnosti využitia GLM modelov pri odhade technických rezerv v neživotnom poistení*, 5. mezinárodní konference Řízení a modelovaní finančních rizik, VŠB-TU Ostrava, Ekonomická fakulta, Katedra financí.

[8] Kozubík, A.,2004. *Insurance Risk Model with Subexponential Distributions*, Journal of Information, Control and Management Systems Vol.2 No. 2, 2004 Faculty of Management Science and Informatics Univesity of Zilina, str.163—172.,

[9] Pacáková, V., 2011. *Modelling and Simulation in Non-Life Insurance*. Recent Researches in Applied Mathematics, Simulation and Modelling, Proceedings of 5th International Conference on Applied Mathematics, Simulation, Modelling (ASM'11), Corfu Island, Greece.

[10] Juhás M., Skřivánková V., 2011. *Analysis of occurance of records in car insurance*. Zborník 8. medzinárodnej vedeckej konferencie Aktuárska veda v teórii a v praxi, Bratislava, 54-62.

Príspevok vznikol v rámci riešenia grantu VEGA č. 1/0931/11