Series on Advanced Economic Issues
Faculty of Economics, VŠB-TU Ostrava

Tomáš Tichý

# SIMULACE MONTE CARLO VE FINANCÍCH

## Aplikace při ocenění jednoduchých opcí

Ostrava, 2010

Tomáš Tichý
Department of Finance
Faculty of Economics
VŠB-Technical University of Ostrava
Sokolská 33
701 21 Ostrava, CZ
tomas.tichy@vsb.cz

Recenze

Martin Dlouhý, VŠE v Praze

Dušan Marček, University of Žilina

Jiří Witzany, VŠE v Praze

The publication was written with the support provided by GAČR (Czech Science Foundation – Grantová Agentura České Republiky) under the project No. 402/08/1237 and the SGS project of VSB-TU Ostrava SP/20104. The support is greatly acknowledged.


Printed in Tiskárna Grafico, s.r.o.
Cover design by MD communications, s.r.o.

ISBN 978-80-248-2352-2

# Předmluva

Simulace Monte Carlo představuje numerickou metodu se širokým využitím při modelování náhodného vývoje snad ve všech oblastech vědy. Její těžiště spočívá zejména v situacích, kdy nám komplexní povaha problému nedovoluje získat analytické řešení. Tato publikace je zaměřena na aplikaci simulační metody Monte Carlo při odhadu správné ceny jednoduchých opcí v rámci rizikově neutrálního přístupu za předpokladu, že podkladový proces opce sleduje různé typy stochastických procesů z obecné množiny Lévyho modelů – tedy včetně zohlednění případné šikmosti a dodatečné špičatosti pravděpodobnostního rozdělení výnosů podkladového aktiva.

Účelem publikace je jak poskytnou teoretické základy pro aplikaci metody Monte Carlo při oceňování na finančních trzích, tak srovnat úspěšnost jednotlivých technik jejího zefektivnění při implementaci v programu *Mathematica*. Jednoduché opce jsou vybrány proto, že je znám (analytický) způsob určení jejich správné ceny, tj. takové hodnoty, kterou je možné považovat z pohledu všech zúčastněných stran za spravedlivou. Díky tomu lze pro jednotlivé techniky simulace Monte Carlo formulovat chybu odhadu i sledovat konvergenci k teoreticky správné ceně.

Ke studiu tématu lze přikročit v několika odlišných úrovních, a to od základních pojmů a souvislostí, přes principy oceňování a modelování, až po detailní analýzu efektivnosti jednotlivých modelů a přístupů. Kniha tak může sloužit jako základní i doplňující studijní materiál pro všechny zájemce o hlubší poznání problematiky oceňování finančních aktiv a finančního modelování.

Čtenáři s minimálními znalostmi ohledně finančních trhů či oblastí pravděpodobnosti a statistiky souvisejících s oceňováním finančních aktiv a finančním modelování mohou nalézt nezbytné informace v první části knihy, nazvané *Základní východiska*. Kapitola *Finanční trhy* tak obsahuje základní informace o struktuře finančních trhů, včetně základního rozboru problematiky opcí. Oproti tomu kapitola *Pravděpodobnost a statistika* poslouží spíše skupině čtenářů, které chybí potřebné matematické znalosti.

Navazující část, *Modelování ceny finančních aktiv*, obsahuje dvě kapitoly zaměřené na objasnění modelování pomocí stochastických procesů a objasnění principů oceňování opcí. Následuje kapitola zaměřená na principy simulace Monte Carlo.

V třetí části knihy, *Simulace Monte Carlo*, pak jsou obsaženy dvě kapitoly se zaměřením na vlastní aplikace této techniky modelování. Postupně tak dochází k ověření a analýze jednotlivých metod a technik při generování náhodných prvků z vybraných pravděpodobnostních rozdělení (Kapitola 6) a také odhadu spravedlivé ceny opce (Kapitola 7).

Text této části knihy je přímo provázán na výpočetní softwarový produkt *Mathematica*, verze 8.0. Většina výsledků je doplněna záznamy příkazů, které zachycují detailní postup výpočtu (pro odlišení od čistých algoritmů a obrázků je používáno označení *Záznam*). Přitom byla snaha využívat spíše základní funkce softwaru tak, aby algoritmy byly srozumitelné i začínajícímu uživateli, avšak aby to nebylo ani na úkor efektivnosti postupu, zejména co se týče časových nároků na výpočet.

V celém textu knihy je jako desetinný oddělovač používána *tečka* a nikoliv *čárka*. Dle názoru autora je takto zjednodušena orientace a zaručena kompatibilita při zápisu vektorů čísel, algoritmů i výsledků v tabulkách či při jejich grafickém zpracování pomocí programu *Mathematica*.

# Obsah

# Přehled základních symbolů, zkratek a označení

$\mathbb{E}$ operátor očekávání, přitom například $\mathbb{E}_t^{\mathcal{P}}$ označuje očekávání učiněné v čase $t$ v prostředí daném pravděpodobnostmi $\mathcal{P}$.

$f$ finanční derivát, přitom $f_t$ je jeho cena v čase $t$.

$f_X$ funkce hustoty náhodné proměnné $X$, přičemž $f_X(x)$ je její hodnota pro $x \in \mathbb{R}$; $X$ také může označovat příslušné pravděpodobnostní rozdělení, viz dále.

$F_X$ distribuční funkce náhodné proměnné $X$, přičemž $F_X(x)$ je její hodnota pro $x \in \mathbb{R}$; $X$ může také označovat příslušné pravděpodobnostní rozdělení, viz dále.

$\imath$ symbol pro imaginární prvek.

$\mathbb{I}_{\mathcal{A}}$, $\mathbb{I}(\mathcal{A})$ označení indikační funkce pro jev $\mathcal{A}$.

$JB$ hodnota JB testu, viz část 2.6.

$\Bbbk_X^3$ šikmost náhodné veličiny $X$.

$\Bbbk_X^4$ špičatost náhodné veličiny $X$.

$\mathcal{K}$ realizační cena finančního derivátu (opce).

$KS$ hodnota KS testu, viz část 2.6.

$\mathcal{P}$ označení reálného prostředí; množina skutečných, statisticky zjištěných pravděpodobností.

$\mathcal{P}(x)$ pravděpodobnost, že nastane $x$.

$q(\alpha)$, $q_\alpha$ kvantil náhodné veličiny pro $\alpha$.

$\mathcal{Q}$ označení rizikově neutrálního prostředí, ve kterém riziko nehraje roli a všechna aktiva přináší bezrizikový výnos; množina rizikově neutrálních pravděpodobností.

$r$ úroková sazba (bezriziková), bezrizikový výnos také $r^{\mathcal{Q}}$.

$\mathbb{R}$ obor reálných hodnot.

$\mathcal{S}$ cena finančního aktiva, podkladové aktivum (opce), přitom $\mathcal{S}_t$ je jeho cena v čase $t$.

$t$ aktuální čas.

$T$ konečný čas, okamžik zralosti finančního derivátu (opce).

$\mathcal{V}$ hodnota opce, přitom $\mathcal{V}_{call}^{vanilla}$ je hodnota jednoduché call opce; obdobně pro put opci i jiné opce.

$\Gamma(x)$ gama funkce pro veličinu $x$.

$\varepsilon, \epsilon$ generovaný náhodný prvek, zpravidla z normálního rozdělení.

$\theta$ parametr pro sladění šikmosti u VG a NIG modelů.

$\vartheta$ parametr pro sladění volatility u VG a NIG modelů.

$\mu$ střední hodnota výnosů finančního aktiva

$\nu$ parametr pro sladění špičatosti u VG a NIG modelů (případně *Lévyho míra* – při uvedení $\nu(\mathrm{d}x)$).

$\Pi$ portfolio aktiv.

$\varpi$ parametr pro korekci střední hodnoty exponenciálního procesu.

$\rho_{XY}$ korelace náhodných veličin $X$ a $Y$, přičemž $R$ označuje matici korelací.

$\sigma$ volatilita výnosů finančního aktiva.

$\sigma_{XY}$ kovariance náhodných veličin $X$ a $Y$, přičemž $C$ označuje matici kovariancí.

$\tau$ doba do zralosti opce, $\tau = T - t$.

$\phi_X(u)$ charakteristická funkce pro náhodnou veličinu $X$, její hodnota v bodě $u$.

$\Phi_X(u)$ kumulant charakteristické funkce $\phi_X(u)$.

$\Psi$ výplatní funkce opce, přitom $\Psi_{call}^{vanilla}$ je výplatní funkce jednoduché call opce, obdobně pro put opci i jiné opce.

$\omega$ základní stav, také elementární jev.

$\Omega$ množina všech možných stavů.

$Bern(p)$ Bernoulliho rozdělení pravděpodobnosti s parametrem $p$.

$Bin(p, n)$ binomické rozdělení pravděpodobnosti s parametrem $\lambda$.

$Exp(\lambda)$ exponenciální rozdělení pravděpodobnosti s parametrem intenzity $\lambda$.

$\mathcal{G}(a, b)$ gama rozdělení pravděpodobnosti s parametry $a$ a $b$ popisujícími umístění a tvar.

$\mathcal{IG}(\mu, \lambda)$ inverzní Gaussovo rozdělení s parametry $\mu$ a $\lambda$ popisujícími umístění a tvar.

$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ Gaussovo (normální) rozdělení pravděpodobnosti s parametry střední hodnotou $\mu$ a směrodatnou odchylkou $\sigma$.

$Poisson(\lambda)$ Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti s parametrem intenzity $\lambda$.

$t(v)$ Studentovo rozdělení pravděpodobnosti se stupni volnosti $v$.

$\mathcal{U}(a, b)$ rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti na intervalu ohraničeném parametry $a$ a $b$.

$\chi^2(v, l)$ $\chi^2$ rozdělení pravděpodobnosti s počtem stupňů volnosti $v$ a parametrem decentralizace $l$.

$m_X^{(k)}$ $k$-tý moment náhodné veličiny $X$.

$\tilde{w}_t^{\mathcal{P}}$ náhodný prvek (zde v závislosti na čase $t$ a v rámci prostředí definovaném $\mathcal{P}$).

$\{x_t\}_{t=1}^T$ posloupnost pozorování náhodné veličiny $X$ za období $t = 1, \ldots, T$.

$\mathcal{Z}(t)$ Wienerův proces, přičemž $d\mathcal{Z}$ je jeho přírůstek za nekonečně krátký časový úsek $dt$.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ pravděpodobnostní prostor, přitom $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathbb{F})$ označuje filtrovaný pravděpodobnostní prostor.

**ATM, ITM, OTM** *at-the-money, in-the-money, out-of-the-money*; opce, jejíž vnitřní hodnota je nulová (kladná, záporná), a to v závislosti na vztahu ceny podkladového aktiva a realizační ceny opce.

**AVMC** *antithetic variates Monte Carlo*; postup simulace Monte Carlo s využitím techniky protikladných proměnných.

**BS model** *Black and Scholes model*; model oceňování opcí dle Blacka a Scholese, trh splňující předpoklady dle Blacka a Scholese (1973).

**BSMC** *bridge sampling Monte Carlo*; specifický postup simulace Monte Carlo s prvotním generováním konečné ceny a navazujícím určení vnitřního průběhu procesu (WBS, VGBS, DGBS apod.).

**BSM PDE** *Black-Scholes-Merton partial differential equation*; parciální diferenciální rovnice pro formulaci opčního oceňovacího problému dle Blacka a Scholese (a Mertona).

**EMM** *Equivalent Martingale Measure*; pravděpodobnostní míra, která je z množiny pravděpodobností ekvivalentních k původním pravděpodobnostem a s jejíž pomocí lze získat z procesu, který byl v čase rostoucí či klesající proces typu martingale.

**GBM** geometrický Brownův pohyb.

**IT** *inverse transform*; technika simulace MC založená na dosazení prvků z rovnoměrného rozdělení do inverzní funkce k distribuční funkci daného rozdělení pravděpodobnosti, tj. technika inverzní transformace.

**LHS** *Latin hypercube sampling*; stratifikační technika simulace.

**MC** (simulace) Monte Carlo.

**NIG model** *normal inverse Gaussian model*, $\mathcal{NIG}(\mathcal{I}(t;\nu);\theta,\vartheta)$; model vývoje ceny finančních aktiv zohledňující šikmost a špičatost výnosů.

**PMC** základní postup simulace Monte Carlo.

**PCP** *put call parity*; vztah mezi cenami call a put opcí.

**QMC** Quasi-Monte Carlo simulace.

**SSMC** *stratified sampling Monte Carlo*, postup simulace Monte Carlo s využitím techniky stratifikovaného výběru (stratifikace).

**VG model** *variance gamma model*, $\mathcal{VG}(g(t;\nu);\theta,\vartheta)$; model vývoje ceny finančních aktiv zohledňující šikmost a špičatost výnosů; přitom $VG_{sub}$ označuje definici modelu na bázi subordinátoru a $VG_{gg}$ definici na bázi rozdílu dvou gama prvků.

# Část I

# Základní východiska

# Kapitola 1

# Finanční trhy

Finanční trhy představují místo, ať už fyzické či virtuální, na kterém dochází k převodu finančních fondů, z nich plynoucích rizik a některých dalších parametrů, jako je doba splatnosti nebo likvidita. Finanční trhy lze alternativně chápat i jako soubor jednotlivých účastníků finančních vztahů – poskytovatelů služeb a jejich příjemců na straně jedné a právních norem, které vymezují mantinely pro finanční operace, na straně druhé; společně umožňují efektivní transformaci finančních fondů, rizika, splatnosti či likvidity.

Funkční finanční trhy jsou nezbytnou podmínkou efektivního fungování celé ekonomiky. Nefunkční či neefektivní finanční trhy značně ztěžují přístup jednotlivých subjektů ke kapitálu, respektive znemožňují úspěšně řídit finanční rizika či likviditu a podstatným způsobem omezují výkonnost subjektů.

Finanční trhy jsou silně citlivé na náladu a očekávání jednotlivých účastníků. Jakákoliv zdánlivě nevýznamná informace se může výrazně projevit na rovnovážné ceně vybraných instrumentů a objemu jejich zobchodovaného množství, tedy likviditě. Budoucí ceny finančních instrumentů jsou proto obtížně předvídatelné, nicméně zpravidla se předpokládá znalost jejich pravděpodobnostního rozdělení, tj. schopnost přiřadit možným budoucím cenám konkrétní pravděpodobnosti.[1] V takovém případě lze možné budoucí ceny jednotlivých instrumentů modelovat *analyticky*, tedy vhodnými operacemi s pravděpodobnostními distribučními funkcemi, funkcemi hustoty, či charakteristickými funkcemi, *numericky*, tedy pomocí numerických postupů a algoritmů, či *simulačně*, tedy na bázi generování (pseudo/ kvazi) náhodných prvků, viz Kapitola 5 *Simulace Monte Carlo*.

V této kapitole nejprve dojde k definici základních typů finančních instrumentů, tedy nástrojů, které umožňují přenos finančních prostředků, ri-

[1] Pro přesnější definici viz Kapitola 2.

zika, splatnosti a likvidity na finančních trzích. S jejich využitím bude provedena klasifikace finančních trhů ze základních úhlů pohledu. Vzhledem k celkovému zaměření této publikace budou závěrečné podkapitoly věnovány podrobnější analýze opcí. Bližší detaily pro hlubší studium finančních trhů, instrumentů a jejich oceňování lze nalézt například v textech Hulla (2008, 2010), Chanceho (2003) nebo Joshiho (2003).

## 1.1 Finanční instrumenty

Finanční instrumenty představují nástroj, s jehož pomocí dochází na finančních trzích k přenosu finančních fondů a rizika mezi jednotlivými subjekty a transformaci splatnosti a likvidity aktiv a pasiv. Pomocí finančních instrumentů dochází ke kontaktu subjektů, které mají přebytek finančních fondů či rizika, ať už jako celku, či v rámci daného segmentu, se subjekty, které mají naopak fondů nedostatek a jsou ochotny za jejich získání zaplatit část budoucího výnosu, respektive jsou ochotny za úplatu převzít množství rizika až do výše svého rizikového profilu.

Rizikem, které můžeme pomocí finančních instrumentů optimalizovat, myslíme zejména dvě složky rizika finančního, a to riziko *tržní*, které vychází z neočekávané změny úrovně tržních cen, a *úvěrové* nebo též *kreditní*, které vychází z potenciální neschopnosti či neochoty věřitele dostát svým závazkům. Tato rizika lze vyjádřit pomocí rizikových měr na bázi $VaR$, tedy kvantilu pravděpodobnostního rozdělení výnosů sledované pozice.

Vůči pojmu finanční instrument jsou velmi blízkými pojmy finanční produkt, cenný papír či případně finanční aktivum. Finanční instrument jakožto nástroj představuje pojem nejširší – zahrnuje jak aktiva, tak závazky. Finančním aktivem bychom měli chápat pouze takový instrument, který znamená pro svého držitele nárok na jinou finanční hodnotu. Tento nárok zpravidla bývá pokryt výplatou peněžních prostředků – očekávaný objem a čas však nemusí být předem znám. Nicméně existují i takové finanční instrumenty, které pro svého držitele (stranu s dlouhou pozicí) mohou znamenat jak nárok na finanční hodnotu, tak povinnost jejího poskytnutí, v závislosti na aktuální situaci na trhu (např. swapy nebo futures).

### Klasifikace finančních instrumentů

V rámci finančních instrumentů často rozlišujeme *primární* nástroje a *sekundární* nástroje s dílčím členěním dle typu (charakteru) instrumentu.[2] Primární nástroje představují přímý nárok na finanční toky, ať už s předem známým objemem a časem výplaty (dluhopisy s pevným kupónem), nebo neznámým (akcie). Sem řadíme zejména *dluhové cenné papíry* a *majetkové*

[2] Alternativní členění finančních aktiv na arbitrážní a nearbitrážní je rozebráno ve Vecer (2011).

*cenné papíry*, dále též *měny* a případně *komodity*, jako jsou drahé kovy. Oproti tomu sekundární nástroje představují nárok na finanční toky pouze zprostředkovaně, a to na základě jiných, jim podléhajících nástrojů. Tuto skupinu lze často ztotožnit s finančními deriváty.

Dluhové cenné papíry, jejichž klasickým případem jsou *dluhopisy*, mají zpravidla dva zdroje budoucích hotovostních toků. Jedná se jednak o navrácení původní investované (nominální) hodnoty a dále pak o platbu úroků.[3] U obou typů plateb je více či méně přesně znám jak objem, tak čas plnění. Jsou proto označovány jako *nástroje s pevnými příjmy* (*fixed-income*).

Jednotlivými příklady dluhových nástrojů jsou vládní (státní) dluhopisy a pokladniční poukázky, dluhopisy municipalit a firem a taktéž půjčky komerčních bank. Těmto produktům jsou velmi blízké měny – tedy domácí či zahraniční hotovost. Ve své podstatě se jedná o závazek centrální banky (a potažmo celého státu), který, vzhledem ke své vysoké bezpečnosti a likviditě, není úročen.

V případě majetkových cenných papírů, jejichž typickým případem jsou *akcie*, lze opět rozlišit dva zdroje budoucích toků. Jedním jsou (ne)pravidelně vyplácené dividendy o předem neznámé výši. Druhým je nárok na příslušnou část majetku emitenta. Majetkové cenné papíry zpravidla poskytují též právo podílet se na řízení a správě majetku emitenta.

Dalším zásadním rozdílem mezi dluhovými a majetkovými instrumenty je riziko a z něho odvozený výnos. Při uspokojování svých nároků jsou v zásadě upřednostňováni majitelé dluhových cenných papírů. To vše způsobuje vyšší volatilitu, a tedy rizikovost výnosů z majetkových cenných papírů.

**Výnosové křivky.** Velmi blízkým pojmem k dluhopisům, či obecně dluhovým instrumentům, jsou *výnosové křivky*. Výnosová křivka představuje vztah mezi dobou do splatnosti dluhopisu[4] (osa $x$) a jeho výnosem do splatnosti (osa $y$). Obvykle platí, že tato křivka je s časem rostoucí, tj. výnos do splatnosti $y$ pro dlouhodobé dluhopisy je vyšší než pro krátkodobé. Zde je nutné rozlišit, zda se jedná o *spotovou* výnosovou křivku (výnosy platné pro daný okamžik), či *forwardovou* (výnosy se vztahují k určitému okamžiku v budoucnu).

Konkrétní výnosová křivka se vztahuje k dluhopisům určitého typu a kvality. Základní výnosovou křivkou je křivka bezriziková. Ta může představovat výnosy do splatnosti státem (vládou, centrální bankou) emitovaných či alespoň ručených cenných papírů (dluhopisy, pokladniční poukázky, apod.). Nutným předpokladem pro bezrizikovost však je omezení analýzy na danou měnu – subjekt není vystaven riziku změny měnového kurzu – a také zanedbání inflace a rizika selhání země – málokterá vláda je schopná

[3] Jako všude jinde, i zde existují výjimky. Jmenujme například bezkupónový dluhopis (*zero-coupon bond*). Jak napovídá název, jedná se o dluhopis s nulovou platbou úroků.
[4] To lze zobecnit na jakýkoliv instrument se známou splatností.

emitovat dluhopisy s ratingem nejvyššího stupně. Lze namítnout, že vláda či centrální banka mohou v případě potřeby emitovat dodatečné peníze – v takovém případě však dojde k růstu množství peněz v oběhu a sníží se jejich relativní hodnota vzhledem k vybranému spotřebnímu koši, tj. reálný výnos z investice se sníží.

Druhou základní sazbou je tzv. *Libor.*[5] Jedná se o sazbu, která je platná na mezibankovním trhu a jako taková je téměř bezriziková. Tato sazba je nejčastěji užívána jako referenční sazba pro transakce finančních institucí.

Další sazby zahrnují určité množství úvěrového (kreditního) rizika, tedy rizika, že emitent alespoň z části nedostojí svým závazkům. Na jejich bázi sestavená výnosová křivka je proto vztažena k určité ratingové kategorii. Čím nižší je přiřazený rating, tím by křivka měla být umístěna výše. V praxi je konstrukce takovýchto výnosových křivek zpravidla prováděna aproximativně na základě rozsáhlého souboru dluhopisů s totožným ratingem.

**Komodity.** Specifickým typem aktiv, se kterým lze rovněž obchodovat na finančních trzích, jsou komodity. Komodity mají mnohé vlastnosti, které je významnou měrou odlišují od jiných aktiv. Některé druhy mají čistě *spotřební* povahu (zemědělské plodiny, mnohé nerostné suroviny), jiné lze chápat i jako *investici* (drahé kovy – zlato, stříbro, platina).

Další odlišností je (ne)možnost přenosu v čase, tj. *skladování*, a v místě, tj. *přeprava.* Zatímco klasická finanční aktiva lze zpravidla bez problému přepravit, nebo lépe převést z místa na místo, ve velmi krátkém časovém okamžiku, u komodit je přeprava buď spojena s významnými časovými a přepravními náklady, nebo je zcela vyloučena (např. voda či elektřina na delší vzdálenost).

Obdobně uchování v čase nemusí být u klasických finančních aktiv spojeno s výraznými problémy. Oproti tomu uschování komodit může být časově omezeno (zemědělské plodiny) či téměř vyloučeno (elektřina). Je-li však skladování možné, pak bývá spojeno s významnými *skladovacími náklady.* Ty lze chápat jako svého druhu záporný výnos spojený s držením daného aktiva.[6]

Můžeme tedy shrnout, že s držením finančních aktiv může být spojen výnos (kupónový, dividendový, úrokový výnos z držení zahraniční měny, přínos spojený z fyzického držení komodity) či náklady, zejména na skladování. To spolu s dalšími specifickými vlastnostmi jednotlivých instrumentů

[5] Označení *Libor* je používáno pro obecně pojatou sazbu na mezibankovním trhu, zatímco LIBOR (*London Inter-Bank Offered Rate*) či PRIBOR (*Prague Inter-Bank Offered Rate*) pro sazbu platnou na konkrétním mezibankovním trhu v dané měně, tj. v daném případě pro Londýn či Prahu.

[6] Srovnejme s držením akcií, jejichž držení přináší pozitivní dividendový výnos, či dluhopisů, jejichž držení přináší pozitivní kupónový výnos.

**Tabulka 1–1** Přehled základních parametrů finančních derivátů

| **České označení** | **Symbol** | **Anglický ekvivalent** |
|---|---|---|
| Podkladové aktivum | $\mathcal{S}$ | *underlying asset* |
| Realizační cena<br>Dodací cena | $\mathcal{K}$ | *exercise price*<br>(*strike price*)<br>*delivery price* |
| Okamžik zralosti<br>(splatnosti)<br>(realizace) | $T$ | *maturity time* |
| Doba do zralosti<br>(splatnosti)<br>(realizace) | $\tau = T - t$ | *time to maturity* |

představuje klíčový faktor při volbě vhodného stochastického procesu pro modelování jejich výnosů či přímo ceny.

## Finanční deriváty

Důležitou roli u finančních instrumentů hraje podoba vypořádání. Dochází-li k vypořádání kontraktu ve stejném čase, v jakém je kontrakt dohodnut, nebo jen s drobným zpožděním několika málo obchodních dnů, hovoříme o *spotovém obchodu* na *spotovém trhu.*

Oproti tomu, pokud je vypořádání stanoveno pro určitý budoucí okamžik, zpravidla v řádu měsíců či let, označujeme kontrakt jako *termínový.* Jinak řečeno, v čase $t$ dochází k dohodě o směně daného aktiva (*podkladové aktivum, underlying asset,* $\mathcal{S}$) za předem dohodnutou částku $\mathcal{K}$ v čase $T = t + \tau$, kde $\tau$ označuje *dobu do zralosti* (splatnosti, realizace; *time to maturity*). Částku $\mathcal{K}$ označujeme jako *realizační* či *dodací* cenu (*exercise price*, *strike price* či *delivery price*).[7] Shrnující přehled těchto základních parametrů a jejich ekvivalentních označení uvádí tabulka 1–1.

**Lineární finanční deriváty.** Příkladem termínových kontraktů jsou *forwardy* a *futures*. Jelikož oba tyto kontrakty jsou založeny na budoucí směně podkladového aktiva (s neznámou budoucí cenou) za předem známou částku, bude jejich hodnota odvozena od hodnoty podkladového aktiva a můžeme je též označit jako *finanční deriváty*, neboli odvozené cenné papíry.[8] K finančním derivátům se dále řadí *swapy* a *opce.*

Základní odlišností mezi forwardy a futures je, že futures oproti forwardům představují kontrakt, který je standardizován takovým způsobem, že

[7] Někteří autoři používají pro označení realizační ceny $X$.

[8] Finanční deriváty je možné alternativně označit jako sekundární aktiva – jejich hodnota je odvozena od podléhajících aktiv primárních.

s ním je možné jednoduše obchodovat na organizovaném trhu. Na druhou stranu forward umožňuje vyspecifikování jednotlivých parametrů tak, aby byly splněny konkrétní potřeby obou stran kontraktu. Oba kontrakty však zakládají povinnost pouze k jedné směně podkladového aktiva za cenu realizační. To je odlišuje od swapů, jimiž je obecně myšlena opakovaná směna dvou aktiv. Vzhledem k oboustranně symetrickému vztahu mezi oběma stranami uvedených kontraktů – strana s dlouhou pozicí má povinnost koupit a strana s krátkou pozicí má povinnost prodat – je možné forwardy, futures a swapy označit jako *lineární finanční deriváty.*

**Opce.** Opce jsou příkladem nelineárního finančního derivátu. Základní vlastností totiž je možnost (tj. *opce*) strany s dlouhou pozicí vybrat si, zda opce bude, či nebude uplatněna. Obecně opce představuje právo strany s dlouhou pozicí uskutečnit v daný čas obchod s podkladovým aktivem $\mathcal{S}$, tj. směnit jej za realizační cenu $\mathcal{K}$. Podle typu obchodu rozlišujeme *call opce*, z nichž vyplývá právo koupit podkladové aktivum, proto též kupní opce, a *put opce*, z nichž naopak vyplývá právo prodat podkladové aktivum, proto též prodejní opce.

V závislosti na tom, jakým způsobem je určen možný čas uplatnění opce, hovoříme o *evropských opcích* nebo *amerických opcích.* Předpokládejme vystavení opce v čase $t = 0$. Zatímco evropskou opci bude možné uplatnit pouze v době zralosti $t = T$, právo plynoucí z vlastnictví opce americké bude možné realizovat kdykoliv v průběhu intervalu $t \in \langle 0; T \rangle$. Specifickým případem je *bermudská opce*, kterou je sice taktéž možné uplatnit v průběhu celé své životnosti, avšak jen v konkrétních diskrétních okamžicích, tj. $t \in \{0, 1, 2, ..., T\}$.

Opce bez stanovení dalších specifických podmínek ovlivňujících jejich uplatnění jsou zpravidla označovány pro svou jednoduchost jako *PV opce – plain vanilla options.* Jsou-li v podmínkách kontraktu stanoveny další údaje, které dále komplikují výplatní funkci, označujeme tyto opce jako *exotické.*

**Marže.** Na mnohých trzích je aplikován požadavek záloh (*margin requirements*). Jejich smyslem je omezit riziko, že účastníci obchodů nedodrží své závazky. Zálohy jsou aplikovány jak na organizovaných, tak neorganizovaných trzích a týkají se zejména finančních derivátů a krátkých (nekrytých) pozic v aktivech primárních.

Princip je takový, že tržní subjekt složí u příslušné osoby (např. tvůrce trhu) zálohu k pokrytí případných ztrát. Tu označujeme jako zálohu počáteční (*initial margin*) a v průběhu životnosti kontraktu z ní jsou kryty případné ztráty. Obdobně případné zisky jsou připisovány na tento účet. Pokud zůstatek klesne pod udržovací limit, je nutné účet doplnit na stanovenou úroveň, zpravidla alespoň do výše počáteční zálohy. Jinak je pozice nuceně ukončena. To pak označujeme jako udržovací (*maintenance margin*) a doplňovací (*margin call*) zálohu.

Zálohový účet nemusí být udržován jen prostřednictvím peněžních prostředků, ale lze využít i jiná aktiva, která jsou dostatečně bonitní. V takovém případě označujeme poskytnuté aktivum jako *kolaterál*. Právě rozdíl mezi hodnotou kolaterálu a hodnotou závazku představuje *marži*. V tomto případě je však nutné si uvědomit, že požadavek na dodatečnou platbu může vzniknout i tím, že se tržní hodnota kolaterálu sníží.

## 1.2 Klasifikace finančních trhů

Na finanční trhy můžeme pohlížet z mnoha různých hledisek, jedná se například o časové hledisko, motiv vstupu na trh nebo způsob obchodování. Důsledné dodržení tradičního členění bohužel často neumožňuje konzistentní zařazení komplexních finančních derivátů.

**Časové hledisko.** Z hlediska času hovoříme o členění na kapitálový trh a trh peněžní. Zatímco na peněžním trhu se směňují finanční instrumenty s krátkou dobou životnosti, zpravidla do jednoho roku, na kapitálovém trhu dochází k obchodování aktiv s dlouhou dobou životnosti.

Toto členění samozřejmě nic nemění na cíli, s jakým jednotliví účastníci na trh vstupují. I na kapitálovém trhu tedy lze získat instrument s úmyslem jeho prodeje v horizontu několika příštích hodin či dnů. Nicméně obecně platí, že k optimalizaci krátkodobého toku hotovosti a úrovně rizika slouží peněžní trhy a pro dlouhodobé financování, respektive investice je využíván zejména kapitálový trh. Pokud však jde o řízení finančního rizika z dlouhodobého pohledu, děje se tak spíše pomocí plánování (např. výrobního procesu) či uzavírání dlouhodobých smluv s obchodními partnery než s využitím finančních instrumentů.

**Hledisko uvedení na trh.** Při analýze aktivit na finančních trzích je často sledováno i hledisko uvedení instrumentu na trh. Pak rozlišujeme *trh primární* a *trh sekundární*. Toto hledisko je relevantní zejména pro dluhové a majetkové cenné papíry, v menší míře pak pro finanční deriváty.

Primární trh představuje místo, na kterém dochází k prvotnímu uvedení (*emisi*) daného finančního instrumentu na trh. Subjekt, který tak činí, lze označit za *emitenta* či *výstavce*. Subjekt, který získává finanční instrument, je označován jako prvotní *upisovatel*.

Oproti tomu na sekundárním trhu dochází k obchodování s již existujícími instrumenty. Tedy těmi, které byly někdy dříve uvedeny na trh primární. Při určitém zjednodušení lze primární trh označit jako místo, na kterém získávají ekonomické subjekty kapitál, respektive se vzdávají rizika. Musí však existovat protistrana, která je ochotna kapitál nabídnout, respektive převzít riziko. Následně přichází ke slovu sekundární trh. Ten jednak plní informační roli – informuje emitenta, za jakých podmínek by bylo možné emitovat další instrumenty – a dále umožňuje další přenos respektive transformaci.

Likvidita na primárním trhu je zajišťována upisovatelem, případně manažerem emise. Co se týče sekundárního trhu, tam je likvidita umožněna přítomností dostatečného počtu kapitálově dobře vybavených tvůrců trhu (*market makers*). Ti kótují nákupní i prodejní ceny zvolených instrumentů. Jsou tak ochotni jak k nákupu, tak k prodeji. Vzhledem k výrazně vyšší dynamice sekundárního trhu je pojmem finanční trh myšlen právě trh sekundární.

**Styl obchodování a organizace trhu.** Neméně důležitou roli pro analýzu finančních trhů jako celku i jednotlivých instrumentů hraje styl obchodování. Lze rozlišit klasický *call market*, na kterém jsou obchodní pokyny zpravidla shromažďovány v určitých, spíše delších časových intervalech na základě verbálních či psaných instrukcí. Na druhou stranu na moderních *screen-based markets* obchodování probíhá elektronicky prostřednictvím pokročilých informačních technologií. V takovémto případě není nutná fyzická přítomnost obchodníka na daném místě.

Z organizačního hlediska lze rozlišit trhy organizované, ať už v burzovní, či mimoburzovní podobě, a neorganizované. Na organizovaných trzích, jak již vyplývá z označení, dochází k organizaci nabídky a poptávky jednotlivých subjektů prostřednictvím odpovědné instituce. Burzou je obvykle chápán organizovaný trh s fyzickým umístěním. Oproti tomu trhy, na nichž se obchody neprovádí na fyzickém místě, ale prostřednictvím alternativních komunikačních kanálů (telefon, počítač), jsou zpravidla označovány za OTC (*Over the Counter*).

Na neorganizovaných trzích dochází ke sladění mezi nabídkou a poptávkou již samotnou přítomností vysokého počtu kvalifikovaných a informovaných subjektů. Čím vyšší počet takovýchto subjektů je na daném trhu přítomen a čím je vyšší jejich kvalifikace a informovanost, tím funguje trh efektivněji a má vyšší likviditu.

Při velmi vysokém stupni zapojení kvalifikovaných a informovaných subjektů do obchodování hovoříme o finančním centru, ať už tradičním, vzniklým především díky vzdělanostní tradici a infrastruktuře – London, New York nebo Tokyo, či alternativním, postaveným zejména na daňovém zvýhodnění.

**Dle obchodovaných instrumentů.** Vzhledem k tomu, že obchodování s jednotlivými finančními instrumenty může probíhat velmi odlišným způsobem, lze rovněž rozčlenit finanční trhy dle jednotlivých *instrumentů*, jako jsou dluhové cenné papíry (dluhopisy), majetkové cenné papíry (akcie), měny, komodity, finanční deriváty. Přitom lze aplikovat i detailnější členění. Pak pro dluhopisy můžeme získat členění podle emitenta (vládní, městské, korporátní), doby splatnosti, způsobu určení kupónu. Obdobně lze členit komodity (drahé kovy, kovy, zemědělské plodiny, apod.), finanční deriváty i měny.

## 1.3 Subjekty a přístupy k oceňování

Na finančních trzích se vyskytuje celá řada subjektů, odlišujících se svou silou či mocí i vztahem k riziku. Nicméně cena aktiva na efektivním trhu by měla být nezávislá na typu konkrétního subjektu, neboť je zpravidla dána jako exogenní veličina – přesněji, žádný subjekt by neměl být schopen ji ovlivnit.

### Tržní účastníci

Subjekty činné na finančních trzích lze rozdělit na *orgány regulace a dohledu*, které vytvářejí soubor závazných právních norem a následně dohlížejí nad jejich dodržováním, a poskytovatele služeb a jejich příjemce. Mezi poskytovatele služeb patří *makléři* (*brokers*) a *tvůrci trhu* (*market-makers*). Příjemci neboli *uživatelé* služeb finančních trhů mohou být subjekty jak individuální, tak institucionální, jako podniky, banky, investiční společnosti, pojišťovny a penzijní fondy, vlády a mezinárodní instituce. Mnohé z těchto subjektů mohou být pouhými zprostředkovateli kontraktů.

Makléři jednají v zájmu svých zákazníků – investorů. Zprostředkovávají jim přístup na finanční trh. Kromě nákupu a prodeje finančních instrumentů svým klientům rovněž nabízí relevantní tržní informace, analýzy a správu finančního majetku. Jejich odměnou je dohodnutý poplatek.

Tvůrci trhu vystupují jako ti, co obchodují s vybraným aktivem. Zpravidla kótují dvě ceny – nákupní, kterou nabízí zaplatit (*bid price*) za dané aktivum, a prodejní, kterou za totéž aktivum požadují zaplatit (*ask price*). *Rozpětí* mezi cenami (*spread*) tvoří ziskovou marži tvůrců trhu.

Mnohem různorodější skupinu tvoří uživatelé, například co se týče investičního horizontu, rozsahu, cíle apod. Následující členění je postaveno na motivech vstupu na finanční trh.

**Motivy vstupu na trh.** *Spekulanti* zohledňují zejména výnos. Mají určitou představu o budoucím vývoji trhu či cenách jednotlivých aktiv. Ta kupují (prodávají) v závislosti na tom, zda cítí, že jsou podhodnocena (nadhodnocena).

*Zajišťovatelé* (*hedgers*) se snaží zejména redukovat riziko plynoucí z již otevřených pozic. Nakupují tedy taková aktiva, jejichž výnos je co možná nejlépe negativně zkorelován s vývojem původního portfolia. Takovou aktivitu nazýváme jako *hedging*.

Hedging je důležitý jak pro finanční, tak nefinanční instituce. Finančním institucím umožňuje hedging udržovat finanční riziko na přijatelné úrovni. Tedy tak, aby bylo minimalizováno riziko nedostatku likvidity a případně následného úpadku, viz problém výpočtu kapitálové přiměřenosti či míry solventnosti a určení ekonomického kapitálu. Oproti tomu nefinanční instituce mohou pomocí hedgingu finanční riziko zcela odstranit. To umožňuje plně se soustředit na činnost, pro kterou byly založeny (výroba, poskytování služeb apod.)

*Arbitrážisté* hledají ziskové příležitosti spojené s nulovým rizikem. Jinak řečeno, snaží se na trhu nalézt příležitost arbitráže, ať už v místě, či čase. Právě díky těmto subjektům by mělo docházet k neustálému obnovování efektivního tržního ocenění. Jakmile se objeví příležitost k arbitráži, je identifikována a bezprostředně poté vymizí. Základní podmínkou pro identifikaci arbitráže je vysoce efektivní přístup dostatečného počtu kapitálově silně vybavených tržních subjektů k potřebným informacím.

## Principy oceňování

Na finančních trzích lze rozlišit tři základní principy aplikovatelné při hledání hodnoty finančních instrumentů. Konkrétně se jedná o rovnovážný přístup, princip nemožnosti arbitráže a rizikově neutrální princip, viz tabulka 1–2.

**Tabulka 1–2** Přehled základních přístupů k oceňování finančních aktiv

| **Český název** | **Označení** | **Anglický ekvivalent** |
|---|---|---|
| Rovnovážný | EQP | *equilibrium* |
| Nemožnost arbitráže | NAP | *no-arbitrage* |
| Rizikově neutrální | RNP | *risk neutral* |

Základní modely vyžadují platnost několika obecných předpokladů:

- *dokonalý trh* (nulové transakční náklady, nulové rozpětí nákup/prodej, nulové daně, neomezený krátký prodej, nekonečná dělitelnost aktiv, nulové požadavky na marže, dostupnost informací),
- *nehrozí nebezpečí úpadku* (jedinečné úrokové sazby pro danou splatnost),
- tržní subjekty *jsou nenasycené* (preferují více před méně),
- jsou pouze *příjemci cen* (ani velké požadavky na nákup/prodej nemohou ovlivnit cenu),

- chovají se *racionálně* a
- jejich jednání je *optimální.*

Jsou-li některé z těchto předpokladů porušeny, může mít výsledná cena podobu intervalu. Alternativním přístupem pak je maximalizace užitku – tedy zohlednění preferencí jednotlivých investorů.

**Rovnovážný princip.** *Rovnovážný princip* je postaven na rovnováze mezi nabídkou a poptávkou. Správná cena (*fair price*) aktiva je taková hodnota, při které je za konkrétních podmínek v daném čase na daném místě rovnováha mezi poptávkou po aktivu $A$ a jeho nabídkou.

Princip rovnováhy je aplikován zejména tehdy, když nelze sestavit matematický model,[9] který by dokázal cenu určit alespoň tak přesně jako trh. Lze proto říci, že cenu určuje jen a jen trh.

Příkladem může být problém nalezení hodnoty primárních aktiv. Teoreticky správná hodnota odpovídá rovnovážné ceně – ceně, při níž platí, že celková poptávka po daném aktivu je shodná s celkovou nabídkou daného aktiva. Model musí zohledňovat preference jednotlivých subjektů, specifikované například prostřednictvím užitkové funkce.

Na rovnovážném principu je rovněž založen známý model CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) odvozený téměř současně Sharpem (1964) a Treynorem (1961) a následně detailněji studovaný a objasněný Lintnerem (1965), Mossinem (1966) nebo Blackem (1972).

**Nemožnost arbitráže.** Oceňovací přístup postavený na principu *nemožnosti arbitráže* vychází ze skutečnosti, že pro některá aktiva existuje za určitých podmínek jen jediná cena, která zamezuje *arbitráži.* Arbitráží je ve finanční terminologii myšleno dosažení vyššího než bezrizikového výnosu při nulovém riziku. Základní principy metodologie byly dány Rossem (1976).

Předpokládejme portfolio $\Pi$, jehož hodnota v čase $t$ je $x$,

$$\Pi_t = x.$$

Jsme-li zároveň schopni určit se 100% pravděpodobností hodnotu portfolia v budoucím čase $T$, $T = t + \tau$, kde $\tau > 0$, tj.

$$Pr\left(\Pi_{t+\tau} = y\right) = 1, \tag{1.3–1}$$

pak lze portfolio $\Pi$ označit pro daný časový úsek $\tau$ jako bezrizikové. Označíme-li $r$ jako bezrizikovou sazbu platnou pro časový úsek $\tau$ a uvažujeme-li spojité úročení, pak platí, že

$$\Pi_T = \Pi_t e^{r\tau}. \tag{1.3–2}$$

Uvažujme situaci, kdy by vztah (1.3–2) neplatil. Tedy

[9] Nebo to není efektivní.

$$\Pi_T > \Pi_t e^{r\tau}.$$

Znamená to, že portfolio $\Pi$ přináší za daný časový úsek $\tau$ vyšší než bezrizikový výnos. Tato modelová situace přiláká pozornost specifického typu tržních subjektů – arbitrážistů. Vhodnou akcí je vypůjčení si maximálního obnosu za bezrizikovou sazbu $r$ a investování této částky do (bezrizikového) portfolia $\Pi$. Výsledkem bude převis poptávky nad nabídkou a tím silný tlak na zvýšení ceny portfolia, $\Pi_t$. Tento tlak přetrvá až do srovnání pravé a levé strany výše uvedeného vztahu, tj. dokud nebude $\Pi_T = \Pi_t e^{r\tau}$.

Obdobný efekt by měl stav, kdy $\Pi_T < \Pi_t e^{r\tau}$. V této situaci je optimální akcí (krátký) prodej portfolia $\Pi$ a investování výtěžku za bezrizikovou sazbu. Je zřejmé, že dopad na cenu aktiva je opačný. Důsledkem převisu nabídky nad poptávkou je tlak na pokles ceny portfolia.

Z uvedené modelové situace je zřejmé, kdy vzniká arbitráž. Z technického pohledu lze rozlišit dvě situace. Prvním případem je stav, kdy je počáteční hodnota portfolia $\Pi$ nulová, tj.

$$\Pi_t = 0,$$

a současně pro jeho budoucí hodnotu platí, že

$$\Pi_T \geq 0 \quad \wedge \quad \mathcal{P}(\Pi_T > 0) > 0. \tag{1.3–3}$$

To znamená, že hodnota portfolia v čase $T$ je nezáporná, přičemž existuje pozitivní pravděpodobnost, že jeho hodnota bude větší než nula.

Druhým případem je stav, kdy je počáteční hodnota portfolia $\Pi$ sice záporná, tj.

$$\Pi_t < 0,$$

avšak pro jeho budoucí hodnotu platí, že bude nezáporná:

$$\Pi_T \geq 0. \tag{1.3–4}$$

Princip nemožnosti arbitráže je aplikován zejména u sekundárních aktiv – tedy finančních derivátů, jejichž hodnota je odvoditelná na základě znalostí o ceně podkladového aktiva. Podkladové aktivum je považováno za primární a jeho cena za exogenní veličinu.

Základním bodem pro aplikaci principu nemožnosti arbitráže je nalezení vhodné struktury portfolia $\Pi$ – takové kombinace finančního derivátu a volného počtu primárních aktiv, aby výsledné portfolio bylo bezrizikové.

**Rizikově neutrální princip.** *Rizikově neutrální princip* je opět aplikovatelný zejména v případě finančních derivátů. Výchozím předpokladem je neutrální postoj k riziku všech investorů. Pak lze aktuální hodnotu aktiva získat na základě diskontování z něho plynoucích peněžních toků bezrizikovou sazbou. Neutrální postoj k riziku zároveň znamená, že riziko (zpravidla vyjádřené směrodatnou odchylkou výnosů aktiva), respektive jeho systematická část, nehraje při určování požadovaného výnosu aktiva žádnou roli. Proto by veškerá aktiva měla přinášet právě výnos odpovídající bezrizikové sazbě $r$. Toto je zajištěno principem nemožnosti arbitráže.

Klíčovou skutečností při určování hodnoty finančních derivátů je znalost jednoznačného způsobu určení jeho výplaty (tj. hodnoty) v době zralosti $T$ v závislosti na ceně podkladového aktiva.

Uvažujme finanční derivát $f$ na aktivum $\mathcal{S}$, jehož výplatní funkce je dána $\Psi(\mathcal{S}_T)$. Hodnota derivátu v čase $t$ musí odpovídat současné hodnotě výplaty očekávané v době zralosti, tj.

$$f_t = \mathbb{E}_t^{\mathcal{P}} \left[ e^{-r^{\mathcal{P}}\tau} \ \Psi(\mathcal{S}_T) \right]. \tag{1.3–5}$$

Zde $\mathbb{E}_t^{\mathcal{P}}$ označuje očekávání[10] v čase $t$ v reálném prostředí, tj. na základě množiny *reálných*[11] *pravděpodobností* $\mathcal{P}$, a $e^{-r^{\mathcal{P}}\tau}$ určuje relevantní diskontní faktor vzhledem k $\mathcal{P}$. Označme statisticky zjištěný spojitý výnos aktiva $\mathcal{S}$ jako $\mu$. Pak platí, že

$$\mathbb{E}_t^{\mathcal{P}} [\mathcal{S}_T] = \mathcal{S}_t e^{\mu\tau}.$$

Následně je možné přepsat (1.3–5) takto:[12]

$$f_t = \mathbb{E}_t^{\mathcal{P}} \left[ e^{-r^{\mathcal{P}}\tau} \ \Psi(\mathcal{S}_t e^{\mu\tau + \tilde{w}_t^{\mathcal{P}}}) \right]. \tag{1.3–6}$$

Zde $\tilde{w}_\tau^{\mathcal{P}}$ představuje náhodný prvek realizovaný v prostředí $\mathcal{P}$.

Jelikož princip rizikově neutrálního přístupu implikuje bezrizikový výnos všech aktiv, lze v prostředí *rizikově neutrálních pravděpodobností* $\mathcal{Q}$ vyjádřit očekávanou hodnotu aktiva $\mathcal{S}$ s využitím bezrizikové sazby $r$,

$$\mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}} [\mathcal{S}_T] = \mathcal{S}_t e^{r\tau},$$

a následně pak výchozí hodnotu derivátu jako

$$f_t = \mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}} \left[ e^{-r\tau} \ \Psi(\mathcal{S}_t e^{r\tau + \tilde{w}_t^{\mathcal{Q}}}) \right]. \tag{1.3–7}$$

Oproti vztahu (1.3–6) došlo k nahrazení $\mathcal{P}$ za $\mathcal{Q}$, což nám označuje přechod z reálného prostředí do prostředí rizikově neutrálního.

Tato transformace značí, že jsou jednotlivým stavům přiřazeny nové pravděpodobnosti, které se od těch skutečných mohou lišit. Zároveň však

[10] Není-li řečeno jinak, označuje operátor $\mathbb{E}_t[X]$ očekávání, které zohledňuje veškeré informace ohledně $X$ od počátku až po okamžik $t$.

[11] Tedy např. statisticky zjištěných na základě předchozích pozorování.

[12] Poznamenejme, že zpravidla $\mathbb{E}_t^{\mathcal{P}} [\Psi(\mathcal{S}_T)] \neq \Psi\left(\mathbb{E}_t^{\mathcal{P}} [\mathcal{S}_T]\right)$. Rovnost platí pouze pro specifické výplatní funkce $\Psi$.

platí, že $\mathcal{Q}$ je *ekvivalentní* k $\mathcal{P}$ – pozitivní pravděpodobnost je přisuzována stejným jevům. Jinak řečeno, stavy, které mohou nastat dle $\mathcal{P}$, mohou nastat i dle $\mathcal{Q}$. A naopak.

Zajímavým důsledkem rizikově neutrálního principu je, že hodnota derivátu dle (1.3–7) by měla být totožná s hodnotou dle (1.3–6). Proto lze uvedený přístup aplikovat i tehdy,[13] jsou-li subjekty rizikově averzní. Zároveň je nutné si uvědomit, že můžeme získat dvě různé *očekávané* ceny – v rámci rizikově neutrálního prostředí, $\mathbb{E}^{\mathcal{Q}}[\mathcal{S}_T] = \mathcal{S}_0 e^{r\tau}$, a v rámci reálného prostředí, $\mathbb{E}^{\mathcal{P}}[\mathcal{S}_T] = \mathcal{S}_0 e^{\mu\tau}$. Přitom první z nich také označujeme jako *forwardovou cenu* $\mathcal{F}_{0,T}$ – je to taková hodnota realizační ceny forwardu, při níž je jeho hodnota nulová.

**Srovnání principů oceňování** Je patrno, že mezi jednotlivými přístupy existují určité provázanosti a nelze stanovit přesné rozhraní. Rovnovážný princip pracuje přímo s preferencemi jednotlivých subjektů a rovnováhou nabídky a poptávky. Pokud se změní preference v systému, můžeme dojít k jinému výsledku.

Princip nemožnosti arbitráže a rizikově neutrální princip využívají rovnováhu nabídky a poptávky jako podpůrný argument. V případě rizikově neutrálního přístupu je podpůrným argumentem rovněž nemožnost arbitráže.

Důležitým rozdílem u obou posledně jmenovaných přístupů je oproti rovnovážnému principu skutečnost, že by v případě změny preferencí subjektů měly poskytnout stejný výsledek – jsou tedy nezávislé na preferencích (*preference free*).

## 1.4 Opce

Opce obecně představuje právo učinit ve stanovenou dobu za předem stanovených podmínek obchod s předem stanoveným aktivem. Vlastník tohoto derivátu tak má právo se v době zralosti rozhodnout, zda relevantní obchod učiní, či nikoliv. Racionální subjekt opci zcela zřejmě uplatní, pouze pokud z tohoto aktu poplyne pozitivní finanční tok. Z definice vyplývá, že výplatní funkce má nelineární povahu. Opce jsou proto také označovány jako finanční deriváty nelineárního typu.

V této podkapitole je nejprve objasněna základní typologie opcí, členění na jednoduché a exotické. Následně je pozornost věnována především opcím jednoduchým, vlivu základních parametrů na jejich hodnotu a pravidlům, pomocí nichž lze popsat vztahy mezi cenami call a put opcí.

[13] Za určitých předpokladů ohledně úplnosti trhů, respektive existence (jedinečné) množiny pravděpodobností $\mathcal{Q}$, která je ekvivalentní k $\mathcal{P}$. Tyto předpoklady budou blíže objasněny v navazujících kapitolách.

**Tabulka 1–3** Přehled základní typologie opcí

| **Členění** | **Český název** | **Zralost/označení** | **Anglický ekviv.** |
|---|---|---|---|
| Dle možností uplatnění | evropské<br>americké<br>bermudské | $T$<br>$[0, T]$<br>$\{0, 1, \dots, T\}$ | *European*<br>*American*<br>*Bermudan* |
| Dle výplatní funkce | jednoduché<br>exotické | $\Psi^{vanilla}$<br>$\Psi^{exotic}$ | *plain vanilla*<br>*exotic* |

Ačkoliv jsou opce mnohdy spojeny s představou spekulací a sázení na určitý typ tržního vývoje, jejich primárním účelem by mělo být řízení finančního rizika (*hedging*), ať už ve finančních, nebo nefinančních institucích (viz např. Tichý (2009)). Právě specifická podoba výplatních funkcí umožňuje optimalizovat poměr rizika a výnosu komplexních pozic, viz také Ahn a kol. (1997).

Základní modely oceňování opcí relevantní pro tuto publikaci jsou obsahem Kapitoly 4. Mnohé další modely a postupy, včetně souvisejícího řízení rizik, lze najít v celé řadě více či méně specificky zaměřených textů, jako je Albanese a Campolieti (2005), Back (2005) nebo Hull (2008).

### Typologie opcí

Opce lze členit dle celé řady hledisek. Nejdůležitější je rozlišení mezi krátkou a dlouhou pozicí, možným okamžikem uplatnění a složitostí výplatní funkce, viz tabulka 1–3. Mezi základní parametry patří *podkladové aktivum* $\mathcal{S}$, které je třeba dostatečně přesně specifikovat zejména u různorodých aktiv, jako jsou komodity,[14] realizační cena $\mathcal{K}$, za kterou je možné podkladové aktivum v případě uplatnění opce směnit, a okamžik zralosti $T$.

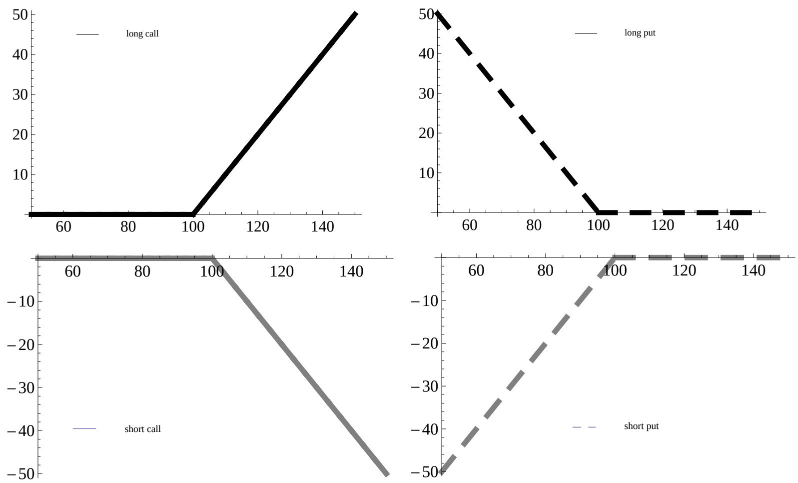
Jestliže je opci možné uplatnit pouze v okamžiku zralosti $T$, hovoříme o *evropské opci.* Pokud je opce uplatnitelná po celou dobu své životnosti, tj. v rozmezí okamžiku vystavení, $t = 0$, a doby zralosti, $t = T$, hovoříme o *americké opci.*[15] Určitý přechod představuje *bermudská opce*, která může být uplatněna v konečném počtu okamžiků po dobu životnosti.

V závislosti na složitosti výplatní funkce odlišujeme opce jednoduché (*PV, plain vanilla*) a *exotické.* Označení plain vanilla opce se vžilo pro call (právo koupit) a put (právo prodat) opce s nejjednodušší výplatní funkcí. Tedy

$$\Psi^{vanilla}_{call} = (\mathcal{S}_T - \mathcal{K})^+ \qquad (1.4\text{–}1)$$

[14]Nebude-li stanoveno jinak, budeme předpokládat, že podkladovým aktivem je akcie, s jejímž držením není spjat žádný dividendový výnos.

[15]Tato vlastnost podstatným způsobem komplikuje oceňovací postupy, viz např. Barraquand a Martineau (1995) nebo Detemple (2005), případně i Peskir a Shiryaev (2006).




**Obrázek 1–1** Výplata z krátké a dlouhé pozice v plain vanilla call a put opci v závislosti na $\mathcal{S}$ při $\mathcal{K} = 100$.

pro plain vanilla call a

$$\Psi_{put}^{vanilla} = (\mathcal{K} - \mathcal{S}_T)^+ \tag{1.4–2}$$

pro plain vanilla put, přičemž $(x)^+ \equiv \max(x; 0)$.

Z definice opce – právo učinit předem definovaný obchod – vyplývá základní rozdílnost mezi dlouhou (*long*) a krátkou (*short*) pozicí. Zatímco výplata plynoucí z dlouhé pozice bude nezáporná, tj. buď 0, nebo $\mathcal{S}_T - \mathcal{K}$, výplatní funkce pro krátkou pozici nebude nikdy pozitivní, tj. buď 0, nebo $\mathcal{K} - \mathcal{S}_T$. Z výplatní funkce dále vyplývá, že výplata z call opce není shora omezena, kdežto výplata put opce je omezena výší realizační ceny. Výplata pro jednotlivé pozice je znázorněna pomocí obrázku 1–1.

### Okrajové a limitní hodnoty opce

Označme $\mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau; \mathcal{S})$ jako hodnotu PV call opce a $\mathcal{V}_{put}^{vanilla}(\tau; \mathcal{S})$ jako hodnotu PV put opce, přičemž se jedná o funkci doby do zralosti $\tau$ a ceny podkladového aktiva $\mathcal{S}$. Přitom se předpokládá, že klasické finanční aktivum (akcie) nemůže mít zápornou hodnotu. Dále, jakmile jeho hodnota klesne na nulu, ztrácí hodnotu již navždy a nemůže znova vzrůst.

Na tomto základě lze zformulovat dvě podmínky, limitní pro $\mathcal{S} \to \infty$ a okrajovou pro $\mathcal{S} = 0$. Dále platí, že při limitě $\tau \to 0$ se bude hodnota opce blížit příslušné výplatní funkci, viz (1.4–1) a (1.4–2). Konkrétní vliv na hodnotu PV opcí je proto následující:

$$\mathcal{S} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau; 0) & = & 0 \\ \mathcal{V}_{put}^{vanilla}(\tau; 0) & = & \mathcal{K}e^{-r\tau} \end{cases} \tag{1.4–3}$$

a

$$\mathcal{S} \to \infty \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau; \to \infty) & \to \infty \\ \mathcal{V}_{put}^{vanilla}(\tau; \to \infty) & \to 0. \end{cases} \tag{1.4–4}$$

### Vnitřní hodnota opce

Důležitou charakteristikou u opcí je rovněž *vnitřní hodnota*. Vnitřní hodnota ($\mathcal{VH}$) je zpravidla definována jako přínos z okamžitého uplatnění opce a odpovídá tak výplatní funkci.[16] Vnitřní hodnota dále umožňuje označit opci za *in-the-money* (ITM, v penězích, $\mathcal{VH} > 0$), *at-the-money* (ATM, na penězích, $\mathcal{VH} = 0$) či *out-of-the-money* (OTM, mimo peníze, $\mathcal{VH} < 0$).

Z výplatních funkcí PV call a put opce (1.4–1) a (1.4–2) za jinak stejných okolností vyplývá, že pokud bude jedna ITM, druhá musí být OTM. Tedy pokud je v čase $t$ například vnitřní hodnota call opce pozitivní, tj. $\mathcal{S} > \mathcal{K}$, je vnitřní hodnota put opce nulová.

**Tabulka 1–4** Vztah vnitřní hodnoty vanilla call a put opce

| **Opce** | **Vanilla call** | | **Vanilla put** | |
|---|---|---|---|---|
| Vztah $\mathcal{S}_t$ a $\mathcal{K}$ | $\mathcal{VH}$ | *označení* | $\mathcal{VH}$ | *označení* |
| $\mathcal{S}_t > \mathcal{K}$ | $\mathcal{S}_t - \mathcal{K}$ | ITM | 0 | OTM |
| $\mathcal{S}_t = \mathcal{K}$ | 0 | ATM | 0 | ATM |
| $\mathcal{S}_t < \mathcal{K}$ | 0 | OTM | $\mathcal{K} - \mathcal{S}_t$ | ITM |

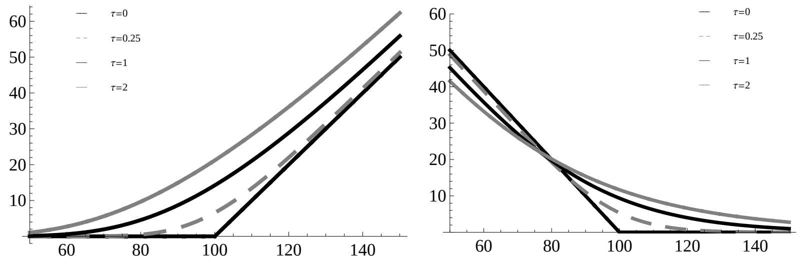
### Časová hodnota opce

Dalším pojmem užívaným v souvislosti s opcemi je *časová hodnota* opce ($\mathcal{TV}$, *time value*).[17] Časovou hodnotu opce lze definovat jako rozdíl mezi celkovou hodnotou opce ($\mathcal{V}$) a její vnitřní hodnotou ($\mathcal{VH}$):

$$\mathcal{TV} = \mathcal{V} - \mathcal{VH}. \tag{1.4–5}$$

[16] Někdy je při výpočtu přínosu z uplatnění užívána namísto ceny realizační její současná hodnota, případně i logaritmus jejich podílu, tzv. *moneyness* – viz například Wystup (2006) nebo Haug (2006, 2007).

[17] Někteří autoři vyhrazují pro rozdíl mezi hodnotou (cenou) a vnitřní hodnotou pojem *hodnota pokračování* – *continuation value* a termín *časová hodnota* (*time value*) využívají v jiné souvislosti, viz například Vecer (2011).




**Obrázek 1–2** Vliv časové hodnoty na celkovou hodnotu plain vanilla call (*vlevo*) a put opce (*vpravo*) pro různá $\tau$ a $\mathcal{S}$ při $\mathcal{K} = 100$, $\sigma = 0.3$ a $r = 0.05$.

Časová hodnota opce tedy uvádí, jak se celková hodnota opce liší od její vnitřní hodnoty. Pokud by časová hodnota byla záporná, bylo by výhodné opci okamžitě uplatnit. Z této myšlenky vychází existence amerických opcí. Americkou opci má totiž smysl uplatnit pouze tehdy, když je její potenciální časová hodnota záporná.

Obrázek 1–2 znázorňuje hodnotu call opce i put opce pro různé doby do zralosti. Konkrétně se jedná o $\tau = 0$ (tj. v okamžiku zralosti, $\mathcal{V} \equiv \Psi$), $\tau = 0.25$, $\tau = 1$ a $\tau = 2$. Ze znázornění je zřejmý odlišný vliv doby do zralosti na časovou hodnotu vanilla opcí. Zatímco v případě call opce je pro všechna $\mathcal{S}$ časová hodnota kladná a rostoucí s $\tau$, v případě put opce vliv závisí na konkrétní ceně podkladového aktiva. Existuje totiž úroveň, pro kterou je časová hodnota nulová při jakémkoliv $\tau$. Ve zde znázorněném případě ($\mathcal{K} = 100$, $\sigma = 0.3$ a $r = 0.05$) se jedná o $\mathcal{S} \approx 80$. Rovněž je patrné, že napravo od tohoto bodu je časová hodnota kladná a rostoucí s $\tau$, nalevo pak záporná a klesající s rostoucím $\tau$.

### Vliv základních faktorů na hodnotu opce

Vliv hlavních faktorů na cenu opce s podkladovým aktivem akcií shrnuje tabulka 1–5. Základním předpokladem je neměnnost ostatních proměnných.[18] Které faktory a jakým způsobem, tj. zda pozitivně či negativně, ovlivňují výši ceny opce, je kromě níže uvedené analýzy možné zjistit taktéž z rozšířených vztahů pro výpočet cen put a call opcí dle vhodného modelu. Podobné výsledky je možno získat i pro opce s odlišnými podkladovými aktivy či komplexnějšími výplatními funkcemi.

**Realizační cena a cena podkladového aktiva.** Ze vztahu (1.4–1) určujícího vnitřní hodnotu call opce je možno vyvodit, že s rostoucí cenou podkladového aktiva $\mathcal{S}$ poroste i $\mathcal{VH}$ a naopak, s rostoucí realizační cenou bude

[18] V reálu je nutné zohlednit vzájemnou provázanost jednotlivých faktorů.

**Tabulka 1–5** Vliv základních faktorů na hodnotu vanilla opcí

| **Název faktoru** | **Symbol (označení)** | **Evropské opce call** | **put** | **Americké opce call** | **put** |
|---|---|---|---|---|---|
| Cena podkl. aktiva | $\mathcal{S}$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| Realizační cena | $\mathcal{K}$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| Doba do zralosti | $\tau$ | $+(?)$ | $\pm$ | $+$ | $+$ |
| Volatilita | $\sigma$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| Bezriziková sazba | $r$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| Dividendový výnos | $q$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

$\mathcal{VH}$ klesat. Vzhledem k tomu, že předpokládáme neměnnost časové hodnoty, je vliv měnící se $\mathcal{VH}$ na hodnotu opce jednoznačný — jedná se o přímou úměru. Ze vztahu pro put opci (1.4–2) je možno vyvodit opačný vliv obou faktorů na velikost $\mathcal{VH}$.

**Doba do zralosti.** Vliv doby do zralosti $\tau$ je u evropských opcí obecně méně jasný. Určitou komplikaci mohou přinést (ne)očekávané dividendové výplaty. Ty mohou mít za následek nižší hodnotu opcí s delší životností oproti opcím s životností kratší.

Nebudeme-li však brát v úvahu dividendový výnos, můžeme si lehce vypomoci americkými opcemi. Držitel opce s delší životností má možnost uplatnit opci nejen po totéž období jako držitel opce s životností kratší, ale i v období následujícím. Americké opce s delší životností by proto měly mít přinejmenším stejnou hodnotu jako opce s životností kratší. Zároveň je známo, že americkou call opci (na aktivum bez jakéhokoliv výnosu dividendového typu) není efektivní uplatnit před dobou zralosti. Časová hodnota proto musí být vždy nezáporná. Proto bude vliv rostoucí doby do zralosti u call opce pozitivní. Avšak u put opcí může být situace odlišná – jak bylo ukázáno pomocí obrázku 1–2, za určitých okolností může být u put opcí časová hodnota kladná, za jiných naopak záporná. Podobně na tom bude i vliv rostoucí doby do zralosti.

Někdy bývá vliv doby do zralosti opce vysvětlován následovně. Vzhledem k tomu, že opce je pákový instrument, je možno nákup call opce chápat jako *výpůjčku* realizační ceny. Čím déle drží kupec tuto výpůjčku, tím je opce cennější. V případě put opce se sice jedná o *zapůjčku*[19] realizační ceny na dobu životnosti opce, většinou však i zde převáží vliv příznivějších možností uplatnění, blíže viz obrázek 1–2.

**Volatilita.** Volatilita $\sigma$ představuje rizikovost, měří tedy rozptyl (směrodatnou odchylku) výnosů ceny podkladového aktiva. Se zvýšením volatility

[19]Vliv na zápornou časovou hodnotu u put opce.

se zvýší šance jak na významný pokles ceny, tak i na růst. U hodnoty běžného aktiva je možno za předpokladu normálního rozdělení výnosů aktiva a neutrálního vztahu k riziku pozorovat tendenci vzájemného vyrovnání se jak pozitivního, tak negativního efektu. Avšak z vlastností opcí vyplývá, že držitel opcí je *jištěn* před nepříznivým vývojem, přičemž z příznivého vývoje (růst $\mathcal{S}$ u call opce a pokles $\mathcal{S}$ u put opce) může profitovat.

Je proto zřejmé, že růst volatility podkladového aktiva bude mít pozitivní vliv na hodnoty call i put opcí. Je vhodné podotknout, že ceny opcí hluboko ITM a OTM jsou ke změnám volatility téměř necitlivé.

S volatilitou ceny podkladového aktiva je dále spjata volatilita ceny opce. Jak rovněž vyplývá z obrázku 1–2, křivka představující hodnotu call opce je konkávní, ležící vždy pod osou 45°. Proto bude mít procentní změna v ceně podkladového aktiva za následek více než procentní změnu hodnoty opce. Obdobný dopad je patrný u put opcí.

**Bezriziková úroková sazba.** Změna bezrizikové úrokové sazby $r$ způsobuje jednak změnu současné hodnoty budoucích očekávaných toků z opce, jednak dále ovlivňuje dlouhodobou míru růstu ceny podkladového aktiva. Dále, jak bylo uvedeno výše, lze put opci v podstatě chápat jako *zápůjčku* současné hodnoty realizační ceny a call opci jako *výpůjčku.*

Za předpokladu jinak neměnných okolností bude mít růst $r$ negativní dopad na cenu put opce a pozitivní na cenu call opce. Opce s kratší dobou životnosti však nejsou příliš citlivé na změnu úrokových sazeb. Proto není častý předpoklad konstantní bezrizikové sazby zcela neodůvodnitelný. Při analýze opcí s delší životností je třeba brát v úvahu skutečnost, že výnosové křivky nejsou za běžných tržních podmínek ploché (*flat*).

**Dividendový výnos.** Přínos z držení opce souvisí s cenovými pohyby podkladového aktiva. Opce však oproti držení podkladového aktiva neumožňují profitovat z dividendových příjmů. Ty samy o sobě zpravidla způsobují pokles ceny a dá se očekávat, že u call opce bude se zvýšením očekávaného dividendového výnosu spjat pokles ceny opce. U put opce lze pozorovat vliv opačný.

Vliv dividend je možno rozšířit i na jiná aktiva, než jsou akcie. V případě opcí na zahraniční měnu odpovídá dividendovému výnosu zahraniční úroková sazba. V případě komodit lze posuzovat přínosy z okamžitého držení (spotřeby).

## Exotické opce

Deriváty s komplikovanější výplatou než standardní evropské (americké) put a call opce se označují jako opce exotické. S většinou z nich se obchoduje mimo burzy, tj. na OTC trzích. Důvodem je skutečnost, že exotické opce jsou tvořeny především k uspokojení konkrétních potřeb korporací či jiných zájemců a umožňují zakomponovat přesná očekávání (či obavy) ohledně budoucího vývoje. To jednak poněkud komplikuje oceňování a dále snižuje likviditu kontraktu. Vzhledem k tomu je více než významný i risk management exotických opcí. Významným problémem při oceňování a zajišťování těchto kontraktů je též často nespojitá výplata.

Mezi exotické opce se mimo jiné řadí:

- *package* neboli portfolio, obsahující call opce, put opce, forwardy, hotovost nebo podkladové aktivum;
- *multistage opce*, umožňující v průběhu životnosti učinit určitá důležitá rozhodnutí, *složené* (*compound*) opce, tj. opce na opce, *výběrové* (*chooser*) opce, které po uplynutí určité časové periody dávají možnost výběru, zda půjde o put či call opci, apod.;
- *digitální* (*binární*) *opce*, jejichž výplata je *vše, nebo nic*;
- *PD opce* (*path dependent option*), tj. opce, u nichž je výplata určitým způsobem závislá na ceně podkladového aktiva za určité období neboli cestě sledované po dobu životnosti;
- *a mnohé další.*

Někdy jsou dále rozlišovány vlastní opce exotické, tj. opce s komplikovanější výplatní funkcí, a opce, jejichž výplata určitým způsobem závisí na cestě sledované podkladovým aktivem po dobu životnosti, tzv. PD opce, do této skupiny se někdy řadí i opce americké.

## 1.5 Vztahy mezi hodnotami opcí

Vazby mezi cenami put a call opcí různých typů lze vyjádřit pomocí celé řady pravidel. Tradičním, a tedy i nejznámějším vztahem je tzv. *put-call parita* (PCP), popisující závislost mezi cenami evropských opcí se stejnou životností, stejnou realizační cenou, které znějí na stejné podkladové aktivum. Výhodou PCP je nezávislost na typu podkladového procesu, tj. označuje se jako *model-free*, nevztahuje se však na opce americké.

Druhým významným vztahem je *put-call symetrie* (PCS), která spojuje ceny OTM put opcí s OTM call opcemi, jedná se o opce s různou realizační cenou. Platnost PCS umožňuje dosáhnout statické (semistatické) replikace opcí různých typů. Tento vztah je platný i pro americké opce a taktéž umožňuje ceně podkladového aktiva nabývat nulovou či zápornou hodnotu.

Dalším vztahem je *put-call ekvivalence* (PCE), viz Grabbe (1983). PCE nachází uplatnění na měnových trzích — důsledkem je skutečnost, že call opce na jednu měnu odpovídá put opci na měnu druhou. Při zobecnění lze tento vztah rozšířit i na jiná podkladová aktiva, jejich ceny pak vystupují jako tzv. numeraire.

K novějším vztahům patří jednak *put-call dualita* (PCD), viz Peskir a Shiryaev (2001), a dále *put-call revesal* (PCR), viz Andreasen a Carr (2002). PCD určuje, že cena put opce může být určena s využitím stejného algoritmu či formule, jaké byly použity pro určení ceny call opce, a to prostou negací ceny podkladového aktiva, realizační ceny a volatility. PCD je platná v rámci Blacka a Scholese (1973) za předpokladu konstantních parametrů, případně i v rámci Mertonova modelu se skoky (1976). Naopak PCR spojuje opce na aktiva, jejichž procesy se vyvíjejí v opačném čase.

**Tabulka 1–6** Přehled základních opčních parit a vztahů

| **Český název** | **Označení** | **Anglický ekvivalent** |
|---|---|---|
| Put-call parita | PCP | *put-call parity* |
| Put-call symetrie | PCS | *put-call symmetry* |
| Put-call ekvivalence | PCE | *put-call equivalency* |
| Put-call dualita | PCD | *put-call duality* |
| Put-call revesal | PCR | *put-call revesal* |

## Obecné principy

S využitím principu nemožnosti arbitráže je možné naformulovat několik obecných vztahů, které musí platit pro cenu evropských nebo i amerických call a put opcí.

Připomeňme rovněž, že hodnota opce jak call, tak put musí být nezáporná (právo učinit obchod nikdy nemá zápornou hodnotu – v nejhorším případě se rozhodneme právo nevyužít). I když je realizační cena zanedbatelná (nulová), hodnota call opce nemůže být vyšší než cena podkladového aktiva – v takovém případě by bylo výhodnější podkladové aktivum koupit přímo. Hodnota put opce nemůže být vyšší než současná hodnota realizační ceny – realizační cena je maximální přínos z uplatnění put opce v době zralosti.

Jedním z důsledků nemožnosti arbitráže je skutečnost, že hodnota call opce nesmí být menší než upravená vnitřní hodnota:

$$\mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau; \mathcal{S}, \mathcal{K}) \geq \mathcal{S}_t - \mathcal{K}e^{-r\tau}. \tag{1.5–1}$$

Jako důkaz uvažujme dvě portfolia: portfolio $\Pi_1$, které odpovídá vanilla call opci, a portfolio $\Pi_2$, které je dáno dlouhou pozicí v podkladovém aktivu $\mathcal{S}$ a krátkou pozicí v $\mathcal{K}e^{-r\tau}$, tj. výpůjčce současné hodnoty realizační ceny. V době zralosti pak mohou nastat dvě situace:

$$t = T: \quad \begin{cases} \mathcal{S}_T \geq \mathcal{K} & \Pi_1 = \mathcal{S}_T - \mathcal{K} \quad \text{a} \quad \Pi_2 = \mathcal{S}_T - \mathcal{K} & (\Pi_1 = \Pi_2) \\ \mathcal{S}_T < \mathcal{K} & \Pi_1 = 0 \quad \text{a} \quad \Pi_2 = \mathcal{S}_T - \mathcal{K} < 0 & (\Pi_1 > \Pi_2). \end{cases}$$

Pokud za všech okolností platí, že hodnota portfolia $\Pi_1$ je v době zralosti alespoň taková jako hodnota portfolia $\Pi_2$, $\mathcal{P}(\Pi_1 \geq \Pi_2) = 1$, není možné, aby stejný vztah neplatil i na počátku. Tím je dokázáno pravidlo (1.5–1).

Obdobné pravidlo lze zformulovat pro vanilla put opci. Rozdílem je pouze skutečnost, že pravá strana je vynásobena koeficientem $-1$. A tedy:

$$\mathcal{V}_{put}^{vanilla}(\tau;\mathcal{S},\mathcal{K}) \geq \mathcal{K}e^{-r\tau} - \mathcal{S}_t. \tag{1.5–2}$$

Princip nemožnosti arbitráže lze rovněž aplikovat na vztah amerických a evropských opcí. Platí totiž, že americká opce musí mít minimálně takovou hodnotu, označme pomocí $\mathcal{VA}$, jako její evropský protějšek:

$$\mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau;\mathcal{S},\mathcal{K}) \leq \mathcal{VA}_{call}^{vanilla}(\tau;\mathcal{S},\mathcal{K}) \leq \mathcal{S}_t \tag{1.5–3}$$

a

$$\mathcal{V}_{put}^{vanilla}(\tau;\mathcal{S},\mathcal{K}) \leq \mathcal{VA}_{put}^{vanilla}(\tau;\mathcal{S},\mathcal{K}) \leq \mathcal{K}. \tag{1.5–4}$$

První důsledek vychází ze skutečnosti, že americká opce obsahuje stejné právo jako opce evropská plus něco navíc. Uvažujme subjekt, který chce získat právo nakoupit podkladové aktivum v době zralosti. Na trhu existují dva deriváty, které mu toto právo dávají – evropská call opce a americká call opce. Pokud bude cena americké call opce nižší, zcela jistě nakoupí tuto a ne evropskou. Obdobně by postupoval vlastník evropské opce – racionální akt je prodej dražší opce (evropské) a nákup levnější (americké). Je tedy zřejmé, že americká call opce má minimálně takovou hodnotu jako odpovídající opce evropská.

Druhý důsledek vychází ze skutečnosti, že maximální výplata put opce je realizační cena $\mathcal{K}$. V případě evropské put opce ji však lze získat až v době zralosti $T$. Oproti tomu americká opce umožňuje její dřívější dosažení a, jak známo, peněžní částka získaná dnes má vyšší hodnotu než tatáž částka, avšak získaná v budoucnu. Americká put opce proto nemůže mít nižší hodnotu než evropská put opce.

## Put-call parita

Toto pravidlo ve své základní podobě ukazuje na důležitý vztah mezi cenou evropské put a evropské call opce na aktivum nepřinášející dividendu.[20] Myšlenka je ve své podstatě jednoduchá, přičemž je možno vyjít z konstrukce bezrizikového portfolia.

Předpokládejme dlouhou pozici v jednoduché call opci s dobou do zralosti $\tau$ na aktivum $\mathcal{S}$ a s realizační cenou $\mathcal{K}$, $\mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau;\mathcal{S},\mathcal{K})$, a krátkou

[20] PCP lze samozřejmě rozšířit i pro obecněji pojatá aktiva.

pozici v put opci se stejnými parametry, $\mathcal{V}_{put}^{vanilla}(\tau;\mathcal{S},\mathcal{K})$. Nyní je nutné nalézt takové aktivum, aby budoucí hodnota portfolia (v době zralosti opcí) byla bezriziková.

Zkusme nejprve přidat dlouhou pozici v aktivu $\mathcal{S}$, tj.

$$\Pi = \mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau;\mathcal{S},\mathcal{K}) - \mathcal{V}_{put}^{vanilla}(\tau;\mathcal{S},\mathcal{K}) + \mathcal{S}.$$

Dle výplatních funkcí opcí mohou v době zralosti nastat dvě možnosti:

$$\Pi_T = \begin{cases} \text{jestliže } \mathcal{S}_T \geq \mathcal{K} & \mathcal{S}_T - \mathcal{K} - 0 + \mathcal{S}_T = 2\mathcal{S}_T - \mathcal{K} \\ \text{jestliže } \mathcal{S}_T < \mathcal{K} & 0 - (\mathcal{K} - \mathcal{S}_T) + \mathcal{S}_T = 2\mathcal{S}_T - \mathcal{K}. \end{cases} \tag{1.5–5}$$

Budoucí hodnotu portfolia $\Pi$ sice neznáme, ale víme, že bude za všech okolností stejná – musí proto přinášet bezrizikový výnos $r$.

Mnohem elegantnější řešení dostaneme, pokud sestavíme uvedené portfolio ne z dlouhé, ale z krátké pozice v podkladovém aktivu, tj.

$$\Pi = \mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau;\mathcal{S},\mathcal{K}) - \mathcal{V}_{put}^{vanilla}(\tau;\mathcal{S},\mathcal{K}) - \mathcal{S},$$

z čehož

$$\Pi_T = \begin{cases} \text{jestliže } \mathcal{S}_T \geq \mathcal{K} & \mathcal{S}_T - \mathcal{K} - 0 - \mathcal{S}_T = -\mathcal{K} \\ \text{jestliže } \mathcal{S}_T < \mathcal{K} & 0 - (\mathcal{K} - \mathcal{S}_T) - \mathcal{S}_T = -\mathcal{K}. \end{cases} \tag{1.5–6}$$

Vidíme tedy, že hodnota portfolia v době zralosti jednoznačně odpovídá realizační ceně opcí. Jeho aktuální hodnota proto musí být

$$\Pi_t = \mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau;\mathcal{S},\mathcal{K}) - \mathcal{V}_{put}^{vanilla}(\tau;\mathcal{S},\mathcal{K}) - \mathcal{S}_t = -\mathcal{K}e^{-r\tau}, \tag{1.5–7}$$

což implikuje pravidlo *put-call parity* následovně:

$$\mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau;\mathcal{S},\mathcal{K}) + \mathcal{K}e^{-r\tau} = \mathcal{V}_{put}^{vanilla}(\tau;\mathcal{S},\mathcal{K}) + \mathcal{S}_t. \tag{1.5–8}$$

Z uvedeného vztahu lze odvodit vztah pro syntetickou opci. Jestliže například není na trhu dostupná call opce, můžeme ji vytvořit dle daného vzorce. Call opce tak musí odpovídat pozici v příslušné put opci, podkladovém aktivu a bezrizikové výpůjčce současné hodnoty realizační ceny,

$$\mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau;\mathcal{S},\mathcal{K}) = \mathcal{V}_{put}^{vanilla}(\tau;\mathcal{S},\mathcal{K}) + \mathcal{S}_t - \mathcal{K}e^{-r\tau}. \tag{1.5–9}$$

### Put-call symetrie

Kromě tradičních předpokladů (dokonalý trh, nemožnost arbitráže) vyžaduje pravidlo PCS dvě další podmínky, Carr a kol. (1998). Jednak to je typ podkladového aktiva, respektive charakter procesu, dle kterého se cena podkladového aktiva vyvíjí, přičemž je vyžadováno určité omezení ohledně charakteru jeho volatility (symetrická funkce ceny aktiva).

Ve své základní podobě se PCS vztahuje pouze na opce, jejichž podkladovými aktivy jsou forwardové ceny, tj. dále je vyžadováno, aby *cost of carry* (náklady držení) byly nulové. Tato podmínka je za určitých okolností splněna i v případě běžných aktiv — příkladem může být opce na akcii přinášející spojitý dividendový výnos odpovídající bezrizikové úrokové sazbě nebo opce na měnový kurz při rovnosti relevantních úrokových sazeb.

Za splnění těchto předpokladů bude vztah ceny put a call opce s totožnou životností a na stejné aktivum (forwardovou cenu $\mathcal{F}$) následující:

$$\frac{\mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau;\mathcal{F},\mathcal{K}_{call})}{\sqrt{\mathcal{K}_{call}}} = \frac{\mathcal{V}_{put}^{vanilla}(\tau;\mathcal{F},\mathcal{K}_{put})}{\sqrt{\mathcal{K}_{put}}}, \tag{1.5–10}$$

přičemž geometrický průměr realizačních cen těchto dvou opcí odpovídá ceně forwardové,

$$\sqrt{\mathcal{K}_{call}\mathcal{K}_{put}} = \mathcal{F}. \tag{1.5–11}$$

Z nesouladu realizačních cen obou opcí je odvozen název pravidla – dochází ke spojení OTM či ITM opcí. Pro ilustraci uveďme jednoduchý příklad.

**Příklad 1.1** *Odpovídá-li forwardová cena 120 p.j., bude mít 100 call opcí s realizační cenou 160 p.j. stejnou hodnotu jako* kolik *put opcí s realizační cenou 90 p.j.?*

*Dle (1.5–11) víme, že:*

$$\mathcal{K}_{put} = \frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{K}_{call}} = 90 \ p.j.$$

*Uvedený problém je možné zapsat takto:*

$$100\mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau;\mathcal{F},\mathcal{K}_{call}) = x \ \mathcal{V}_{put}^{vanilla}(\tau;\mathcal{F},\mathcal{K}_{put}),$$

*kde x je množství put opcí, které chceme zjistit. Následně můžeme x vyjádřit takto:*

$$x = \frac{100\mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau;\mathcal{F},\mathcal{K}_{call})}{\mathcal{V}_{put}^{vanilla}(\tau;\mathcal{F},\mathcal{K}_{put})}.$$

*Nyní můžeme vyjádřit $\mathcal{V}_{call}^{vanilla}$ z (1.5–10), tedy:*

$$\mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau;\mathcal{F},\mathcal{K}_{call}) = \mathcal{V}_{put}^{vanilla}(\tau;\mathcal{F},\mathcal{K}_{put})\frac{\sqrt{\mathcal{K}_{call}}}{\sqrt{\mathcal{K}_{put}}},$$

*a po dosazení do předchozího vztahu,*

$$x = 100\frac{\sqrt{\mathcal{K}_{call}}}{\sqrt{\mathcal{K}_{put}}} = 100\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{90}} = 133,33,$$

*získáme žádaný výsledek.*

Přestože je cena call opce $\mathcal{V}_{call}^{vanilla}(\tau; \mathcal{F} = 120, \mathcal{K}_{call} = 160)$ aritmeticky více OTM než cena put opce $\mathcal{V}_{put}^{vanilla}(\tau; \mathcal{F} = 120, \mathcal{K}_{put} = 90)$, je její hodnota vyšší. Tuto skutečnost způsobuje existence absolutní (volatilita ceny, $d\mathcal{F}$) a relativní volatility ($\frac{d\mathcal{F}}{\mathcal{F}}$).